Barbara Bilewicz-Kuźnia

EDUKACJA GEOMETRYCZNA DZIECI



WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ

Recenzent
prof. dr hab. Gustaw Treliński

Redakcja
Teresa Dunin

Redakcja techniczna
Roman Fiut

Projekt okładki i stron tytułowych
Marta Kwiatkowska

Skład
Jarosław Bielecki

ISBN 978-83-7784-535-6

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
20-031 Lublin, ul. Idziego Radziszewskiego 11
tel. 81 537 53 04
www.wydawnictwo.umcs.lublin.pl
e-mail: sekretariat@wydawnictwo.umcs.lublin.pl

Dział Handlowy
tel./faks 81 537 53 02
Księgarnia internetowa: www.wydawnictwo.umcs.eu
e-mail: wydawnictwo@umcs.eu

Drukarnia „Elpil", ul. Artyleryjska 11, 08-110 Siedlce

SPIS TREŚCI

WSTĘP

W starożytności i czasach średniowiecznych geometria miała znaczące miejsce w edukacji dzieci i młodzieży. Jako jedna z siedmiu sztuk wyzwolonych, tzw. *artes liberales*, stanowiła podstawę wykształcenia, była waloryzowana. W ciągu upływu lat i kolejnych wieków jej miejsce w procesie edukacyjnym zmieniło się. Została zdominowana przez arytmetykę i znalazła się w jej cieniu.

Współcześnie, zgodnie z aktualną podstawą programową[1], aktywności geometryczne dzieci w wieku przedszkolnym związane są z czynnościami manipulacyjnymi na przedmiotach i z pomiarem długości z użyciem prostych sposobów mierzenia. Przeciętny uczeń klasy III szkoły podstawowej ma umieć rozpoznać i nazwać podstawowe figury geometryczne, rysować odcinki o podanej długości, obliczać obwody figur geometrycznych; powinien rysować drugą połowę figury symetrycznej, figurę w powiększeniu i pomniejszeniu, kontynuować regularność w prostych motywach. Taki zakres treści geometrycznych nie jest szeroki. Można by rzec jest podstawowy. Szkoda, bo dydaktycy matematyki podkreślają, za J. Brunerem, że każde dziecko, na każdym etapie rozwoju można uczyć efektywnie każdego przedmiotu pod warunkiem, że jest on podawany w formie rzetelnej intelektualnie i dostosowanej do możliwości rozwojowych dziecka. Co więcej, teoretyczne i praktyczne niedocenianie treści geometrycznych może być przyczyną ujawnionego i rozpoznanego zjawiska, jakim jest „syndrom antygeometryczny”[2].

Wyniki badań amerykańskich[3] wykazują, że dzieci w wieku przedszkolnym potrafią znacznie więcej niż to, co proponuje się im w podstawie programowej.

---

1 Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z dnia 15 stycznia 2009).

2 J. F. Szarygin, L. N. Jerganżyjewa, *Geometria poglądowa*, Wyd. Ośw. Fosze, Rzeszów 1995, s. 5.

3 E. Swoboda, *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci,* Wyd. UR, Rzeszów 2006, s. 17.

W trakcie odpowiednio zorganizowanych zajęć są w stanie badać i opisywać różnorodne kształty, formułować pytania i przypuszczenia, świadomie analizować swoje myślenie. Badacze twierdzą, że dzieci są w stanie nie tylko operować precyzyjnymi pojęciami (np. graniastosłup prostokątny), ale także „głęboko wejść" we własności brył. Tworząc układanki czy szlaczki, mogą nie tylko odgadnąć, co będzie dalej, ale także dokonać transformacji jednego szlaczka na inny czy też reprezentować tę samą regularność na różne sposoby[4].

Głównym celem niniejszego opracowania jest próba poszerzenia przestrzeni dyskusyjnej oraz praktycznych rozwiązań metodycznych o zakres edukacji geometrycznej. Wyrażam przez to przekonanie, że wstępna edukacja geometryczna czy propedeutyka geometrii powinna mieć swoje „wygodne i szerokie miejsce" w programach wczesnego kształcenia i zarazem powinna „być uczona" inaczej. Stawianie małym dzieciom problemów geometrycznych może wpływać bardzo pozytywnie na rozwój ich myślenia, a głębszy kontakt z geometrią przyczynia się do bogacenia życia emocjonalnego, estetycznego i duchowego[5]. Mierzenie, badanie kształtów, form i wymiarów sprzyja kształtowaniu wrażliwości geometrycznej, czyli szczególnego rodzaju percepcji informacji wizualnych, umiejętności twórczego korzystania z nich i ich przetwarzania.

Doskonaląc praktykę kształcenia geometrycznego dzieci i młodzieży, warto sięgnąć do tradycji pedagogicznych i jednocześnie promować nowe, innowacyjne rozwiązania metodyczne, sprawdzone metody i formy pracy oraz przydatne środki dydaktyczne. Opracowanie to próbuje dążyć do realizacji tych celów. Opiera się na założeniu, że w kształceniu geometrycznym powinno dominować podejście całościowe, oparte na teoriach psychopedagogicznych i matematycznych. Dlatego też znaczną jego część poświęcono teoretycznym aspektom rozwijania intuicji geometrycznej.

W toku pracy nad książką zrodziło się także spostrzeżenie, że do właściwej literatury nauczyciel, student czy badacz może z większym lub mniejszym trudem dotrzeć sam, ale poważniejszym problemem może być dla niego zaprojektowanie i realizowanie kształcenia geometrycznego zgodnego z najnowszymi osiągnięciami psychopedagogiki i dydaktyki matematyki. Współcześnie, przy tak łatwym dostępie do różnych nierecenzowanych publikacji metodycznych, zamieszczanych często w Internecie, nauczyciele i studenci nie zawsze mają pełne przekonanie co do rzetelności pedagogicznej materiałów dydaktycznych. Pojawiają się wahania w kwestiach teoretycznych i praktycznych, związanych z doborem metod, form i środków dydaktycznych. Wiele kwestii związanych z tym problemem rodzi potrzebę zmian. Warto przyjrzeć się systemowi kształcenia studentów – przyszłych

[4] *Ibid.*, s. 18.
[5] E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 8.

nauczycieli w zakresie matematyki, zwłaszcza pod kątem rozwijania świadomości kształcenia geometrycznego najmłodszych. Warto ukazywać skuteczne sposoby rozwijania intuicji geometrycznej oraz rozwijania zdolności diagnozowania i prognozowania zdolności „widzenia geometrycznego"[6] wychowanków. Należy ich uwrażliwić na inne, może „mniej matematyczne" zalety geometrii. Jest ona środkiem rozwijania kultury plastycznej, pomaga dostrzegać i badać piękno architektury, symetrię i asymetrię, kształty widoczne w dziełach światowej kultury, sztuce użytkowej, zdobniczej, parkowej, nowoczesnej.

Pomysł napisania tej książki pojawił w toku moich zajęć ze studentami z przedmiotu: edukacja matematyczna. Dzięki aktywnej, prowokującej do dyskusji i wymiany myśli postawie uczestników tych zajęć utwierdziłam się w przekonaniu o tym, że istnieje potrzeba przygotowania tego opracowania. Dziękuję za to.

Książka składa się z sześciu rozdziałów. Rozdziały od pierwszego do piątego mają charakter teoretyczny. Przedmiotem analizy jest w nich pojęcie *geometria*, miejsce geometrii w koncepcjach pedagogicznych i programach nauczania, psychopedagogiczne podstawy kształtowania się intuicji geometrycznych w okresie dzieciństwa, charakterystyka dyspozycji dziecka do uczenia się matematyki i geometrii, drogi i warunki geometrycznego poznawania świata. W ostatnim, szóstym rozdziale przedstawiam przykłady praktycznych rozwiązań związanych z budowaniem w umysłach dzieci pojęć dotyczących figur płaskich i przestrzennych, poznawaniem i rozumieniem zjawiska symetrii. Znajdują się tu autorskie propozycje zadań, zabaw i ćwiczeń zmierzających do wyzwalania u dzieci aktywności poznawczej i twórczej poprzez kontakt ze światem materialnym przez pryzmat zjawisk i prawidłowości geometrycznych. Celem propozycji metodycznych jest rozwijanie myślenia przestrzennego, umiejętności matematyzowania sytuacji obserwowanych w otoczeniu, budzenie u dzieci twórczej postawy wobec problemów i zadań.

Opracowanie przeznaczone jest dla studentów wczesnej edukacji dziecka, nauczycieli praktyków, nauczycieli akademickich, a także rodziców dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym oraz zainteresowanych badaczy. Jeśli zainspiruje ono czytelnika do własnych poszukiwań i stanie się przydatne w toku jego pracy, dostarczy mi to dużo radości.

Bardzo serdecznie dziękuję Recenzentowi – Panu Profesorowi dr. hab. Gustawowi Trelińskiemu za życzliwe i pouczające spostrzeżenia, które pomogły mi nadać tej książce ostateczną formę i treść.

Autorka

6 J. F. Szarygin, L. N. Jerganżyjewa, *Geometria poglądowa*, s. 5.

1. GEOMETRIA JAKO NAUKA

Wiek XXI to czas radykalnych zmian zachodzących w każdej dziedzinie życia. Szybkie tempo rozwoju techniczno-informatycznego powoduje dynamiczny wzrost zastosowania komputerów i innych urządzeń elektronicznych. Środki te ułatwiają życie codzienne, ale też w dużej mierze zwalniają uczniów z konieczności szacowania, mierzenia czy dokonywania obliczeń. Gdy w zasięgu ręki jest telefon komórkowy lub komputer z odpowiednimi aplikacjami, łatwej i zdecydowanie szybciej jest na przykład zmierzyć czas, obliczyć odległość czy procent. Proces myślenia matematycznego młodszego pokolenia zdaje się być współcześnie zakłócany przez wpływ dobrodziejstw techniki, a związana z nim zdolność rozwiązywania problemów matematycznych może się osłabiać. Pojawia się więc konieczność uwrażliwiania przedszkolaków i małych uczniów na patrzenie na otaczający świat i występujące w nim zjawiska w szczególny sposób, używając „matematycznych oczu"[1], szczególnego rodzaju percepcji, który pomoże postrzegać i rozwiązywać problemy matematyczne. Jak podają źródła, matematyka jako nauka wyrosła z nauki zwanej geometrią. W niniejszym rozdziale zarysowuję genezę geometrii, opisuję, jak się rozwijała na przestrzeni wieków, i przedstawiam cele edukacji geometrycznej dzieci.

1.1. GEOMETRIA – WPROWADZENIE

Geometria jest współcześnie określana jako dział matematyki, którego przedmiotem jest badanie figur geometrycznych i zależności między nimi[2]. Jest to nauka znana od czasów antycznych, która wyrosła i rozwinęła się dzięki ludzkiej

---

1 http://www.haveyougotmathseyes.com, data dostępu: 2.03.2012.
2 W. Waliszewski (red.), *Encyklopedia szkolna – Matematyka,* WSiP, Warszawa 1997, s. 117.

potrzebie mierzenia przedmiotów oraz badania przestrzeni. Jest ściśle związana ze sztuką dekoracyjną, sztuką użytkową oraz sztuką wysoką. Można w niej znaleźć odzwierciedlenie myślenia danej epoki, przejawy rozwoju cywilizacji i odmiennej kultury narodów.

Wyraz *geometria* jest pochodzenia greckiego i oznacza mierzenie ziemi lub miernictwo (*geo* – ziemia, *metro* – mierzę). Rozwój geometrii ma zaś związek z praktyką, ludzką działalnością związana z mierzeniem i budowaniem. Starożytny człowiek, wznosząc świątynie, kolumny, mosty i łodzie oraz ozdabiając otaczające go w życiu przedmioty, posługiwał się wiedzą i umiejętnościami matematycznymi. Z tej potrzeby zrodziła się teoria wyjaśniająca. Tak oto, w dużym uproszczeniu, powstała geometria – nauka rządząca się ścisłymi prawami, pojmowana jako opisująca świat czy jego fragmenty; teoria przestrzeni, z której wyrosła królowa nauk – matematyka (z greckiego *máthéma* – nauka, wiedza, poznanie)[3], niepodzielnie do dziś panująca i będąca synonimem ludzkiej mądrości i erudycji.



▪ Fot. 1. Motywy roślinne w architekturze – czasy antyczne – katedra św. Pawła w Rzymie[4]

Poza rozwojem geometrii i matematyki, jako nauk ścisłych, rozwijała się także, związana ze zjawiskami i prawidłowościami geometrycznymi, sztuka zdobnicza, a człowiek doskonalił sprawności geometryczne, tworząc ornamenty.

W ten oto sposób ukształtował się, znany już w Grecji w IX wieku p.n.e., styl geometryczny, którego charakterystyczną cechą było posługiwania się prostym, wielokrotnie powtarzanym, zgeometryzowanym motywem. Styl ten zaistniał w wielu późniejszych kulturach, np. Celtów, Indian, sztuce islamu czy baroku, znany jako *horror vacui* (lęk przed pustką)[5] i stanowił tendencję do wypełniania dekoracjami całych powierzchni przedmiotów, ścian, płaszczyzn czy obiektów.

3 B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji dzieci* [w:] M. Karwowska-Struczyk, D. Sobierańska, M. Szpotowicz (red.), *Pedagogika przedszkolna i wczesnoszkolna. Badania, opinie, inspiracje*, Wyd. Akad. Żak, Warszawa 2011, s. 276.

4 Fotografie pochodzą z archiwum autorki.

5 http://pl.wikipedia.org/wiki/Horror_vacui, data dostępu: 2.02.2012.





▪ Fot. 2, 3. Royal Pavillon, styl hindi XVII–XIX wiek, Brighton

Styl ten pojawił się także w Polsce.



▪ Fot. 4. Wawel (gotyk XII–XIV wiek)



▪ Fot. 5, 6. Geometryczne zdobienia na fasadach kamienic w Gdańsku, ul. Długi Targ



Regularności i zjawiska geometryczne, widoczne w zdobieniach pięknych przedmiotów, na tkaninach, ceramice oraz antycznych arcydziełach architektury, pochodzących z odległego okresu, a także tych powstałych później, cieszą do dziś szczególnie oczy artystów, matematyków i wnikliwych obserwatorów. W księgach zapisana jest natomiast teoria geometrii, będąca dorobkiem intelektualnym stworzonym przez starożytnych filozofów i stanowiąca podstawy rozwoju geometrii współczesnej.

1.2. ROZWÓJ GEOMETRII

W celu ukazania dynamiki zmian w zakresie znaczenia geometrii jako nauki i w tym kontekście zrozumienia w czasach współczesnych potrzeby wczesnej edukacji geometrycznej najmłodszych w niniejszym podrozdziale[6] przedstawiam syntetycznie jej rozwój, począwszy od czasów starożytnych do współczesności. Zaczynam od znamienitych początków, przedstawiam czas jej świetności, wymieniam nazwiska najważniejszych teoretyków i badaczy tego obszaru wiedzy, ich główne podejścia i osiągnięcia oraz prezentuję współczesne kierunki jej rozwoju.

Geometria jako nauka związana jest z kulturą grecką, choć wywodzi się z Egiptu. Wedle papirusu *Rhinda* (2000–1700 p.n.e.) Egipcjanom znane były sposoby mierzenia powierzchni i objętości niektórych brył.

Systematyzowanie wiedzy geometrycznej zapoczątkował Tales z Miletu (ok. 624–625 p.n.e–545–547 p.n.e) – grecki filozof i uczony. Wyprowadził on wiele pojęć, będących podstawami geometrii, a przede wszystkim twierdzenie Talesa.

Koncepcja geometrii w ujęciu Platona (427–347 p.n.e.) związana była ściśle z jego teorią idei. Według Platona istnieją dwa rodzaje bytu: niezmienne idee, które istnieją poza czasem, przestrzenią i ludzkim poznaniem, oraz zmienne rzeczy, postrzegane za pomocą zmysłów. Idee istnieją prawdziwie, a rzeczy stają się. Zdaniem Platona istnieją idee arytmetyczne (jeden, dwa, trzy...) oraz idee geometryczne (np. prosta, punkt, okrąg). Geometria bada idee geometryczne, jej przedmioty należą do świata idei i są badane rozumem. Matematyk nie tworzy przedmiotów matematyki, ale odkrywa je i opisuje.

---

6 Fragment dotyczący rozwoju geometrii od czasów starożytnych do czasów Euklidesa pochodzi z mojego wcześniejszego opracowania: B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji dzieci*..., s. 275–276.

Arystoteles (384–322 p.n.e.) był zdania, że matematyka jest nauką o obiektach (zwanych matematycznymi), wydobywanych z rzeczy w procesie abstrakcji, czyli pewnego rodzaju idealizacji. W dziele *Fizyka* Arystoteles stwierdza:

> [...] ciała fizyczne posiadają powierzchnię, objętość, rozciągłość i punkty, będące przedmiotem badań matematyka. Matematyk nie traktuje tych danych jako granic ciał fizycznych, ani też nie rozważa atrybutów jako należących do takich ciał. Z tego więc względu oddziela je[7].

W dziele *Metafizyka* czytamy:

> [...] matematyk prowadzi swoje badania na przedmiotach abstrakcyjnych, bada swój przedmiot, pozbawiając go wszelkich zmysłowych własności, takich jak ciężar, lekkość, twardość oraz jej przeciwieństwo, zachowuje tylko ilość i ciągłość, bada wzajemne położenie niektórych spośród tych przedmiotów oraz ich atrybuty, wymierność i niewymierność innych, a jeszcze innych proporcje[8].

Najbardziej zasłużonym greckim matematykiem, fizykiem i filozofem był żyjący i pracujący w Aleksandrii w IV wieku p.n.e. Euklides (365–300 p.n.e.). W opracowaniu pt. *Elementy* stworzył on podstawy geometrii, które były fundamentem jej nauczania do końca XIX wieku. *Elementy s*kładają się z 13 ksiąg. Autorem polskiego przekładu ksiąg I–VI, XI i XII, który ukazał się w 1817 roku, był Józef Czech.

W *Elementach* geometrii poświęcono osiem ksiąg, planimetrii – pięć: I–IV i VI, a stereometrii trzy: XI–XIII. W odkrywaniu i formułowaniu definicji oraz koncepcji Euklides posługiwał się metodą aksjomatyczno-dedukcyjną. Jak podają J. Filip i T. Rams, „idea metody aksjomatycznej polega na tym, że zamiast wyjaśniania, jakie przedmioty się bada, należy wyliczyć jedynie własności tych przedmiotów. Własności podaje się na początku, jako aksjomaty rozważanej teorii. Każda inna własność, która nie została zaliczona do aksjomatów, jest twierdzeniem, które musi być udowodnione, wydedukowane zgodnie z prawem logiki (z łac. *deductio* – wyprowadzać)”[9].

Wykłady w księgach rozpoczynają się od spisu 35 definicji (tzw. opisań *vel* określeń), np. „Punktem lub znakiem jest, co nie ma żadnych części lub nie ma żadnych wielkości; Linia jest długością bez szerokości”, po którym następują postulaty i aksjomaty. Postulaty dotyczą geometrii. W Księdze I znajdują się zdania głoszące możliwość przeprowadzania określonych konstrukcji geometrycznych, np. „Jeśli mam dwa punkty, to przez nie mogę poprowadzić prostą, można po-

7 R. Murawski, *Filozofia matematyki*, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2008, s. 23–24.
8 *Ibidem.*
9 J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie matematyki,* Of. Wyd. Impuls, Kraków, 2000, s. 14.

prowadzić prostą od któregokolwiek punktu"[10]. Aksjomaty to twierdzenia o charakterze ogólnym, które opisują podstawowe własności rzeczy, np.:

> Część jest mniejsza od całości; Całość jest większa od części; Punkt jest tym, co nie ma części lub nie ma żadnej wielkości; Płaszczyzna to powierzchnia jednakowo położona względem swoich punktów[11].

W ciągu kolejnych stuleci geometria rozwijała się skokowo, a burzliwy jej rozkwit nastąpił dopiero w XVII wieku za sprawą francuskiego filozofa, matematyka i fizyka Kartezjusza (1596–1650). Jego dzieło *Géométrie* zapoczątkowało rozwój geometrii analitycznej. Zdaniem Kartezjusza wszelkie własności rzeczy należy wywodzić z kształtu i ruchu, całą przyrodę zaś rozważać geometrycznie i mechanicznie. Kartezjusz był zdania, że tylko matematycy umieją znajdować dowody i dzięki temu dostarczać wiedzy pewnej; wprowadził ideę, by twory geometryczne opisywać za pomocą metod algebraicznych, co przyczyniło się do rozwoju geometrii analitycznej oraz innych geometrii.

Filozoficzne rozważania na temat istoty przestrzeni, porządku, miejsca, współistnienia i relacji pomiędzy obiektami geometrycznymi można odnaleźć – poza pismami Kartezjusza – w dziełach I. Newtona, G. W. Leibniza, I. Kanta. Geometria kształtowała się wówczas jako świat faktów i zjawisk wywiedzionych z systemu aksjomatów w przestrzeni, traktowanej jako obszar, w ramach którego odbywają się dynamiczne procesy rozumowań[12].

Aż do XIX wieku geometria była nauką, której twierdzenia podlegały wartościowaniu typu prawda–fałsz. Aksjomaty (pewniki) były traktowane jako prawdy oczywiste, nie dowodziło się ich ani nie uzasadniało. Z biegiem wieków stała się one nauką abstrakcyjną. Jej aksjomaty i twierdzenia przestały być prawdami koniecznymi, jako naukę można ją interpretować na różne sposoby.

Do współczesnych kierunków w filozofii matematyki zalicza się logicyzm, intuicjonizm i formalizm, które ukształtowały się w końcu XIX wieku. Logicyzmem nazywa się kierunek w filozofii matematyki głoszący, że matematyka jest częścią logiki. Intuicjonizm był jednym z kierunków konstruktywistycznych w teorii matematyki. W jego świetle pewne atrybuty niektórych prostych obiektów matematycznych, jak np. liczb naturalnych czy obiektów geometrycznych lub własności przestrzeni, są nam dane i dostępne poznaniu dzięki intuicjom, jakie posiadamy na ich temat. Przedstawiciele tego nurtu uważają, że treść twierdzeń matematycznych, a zwłaszcza mechanizmy prowadzące do rozwoju wiedzy ma-

---

[10] W. Jędrychowski, M. Kordos (red.), *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie,* WSiP Warszawa, 1993, s. 114.

[11] *Ibid.,* s. 27–28.

[12] E. Swoboda, *Przestrzeń...,* s. 53.

tematycznej, w znacznej mierze są dostępne dzięki intuicji – możliwości wglądu i zrozumienia ich znaczenia dzięki pewnym, często pierwotnym intuicjom umysłu matematyków[13]. Te dotychczasowe próby gruntowania matematyki proponowane przez intuicjonistów podważył twórca formalizmu – niemiecki matematyk David Hilbert. Jego odkrycia doprowadziły do ogromnego rozwoju teorii geometrycznych. D. Hilbert zaproponował oparcie matematyki na matematyce finitystycznej za pośrednictwem stworzonej przez siebie teorii dowodu[14]. Zdaniem I. Gucewicz-Sawickiej stworzył on „teorię koncepcji sformalizowanej, w której dowód jest ciągiem zdań zbudowanych zgodnie z zasadami logiki formalnej. Uwypuklenie aspektu logicznego sprowadziło geometrię do gry formalnej. Obiekty niezdefiniowane są pozbawionymi sensu treściowego symbolami (co nie może być zaakceptowane przez dydaktykę zainteresowaną powstawaniem i kształtowaniem pewnych intuicji)"[15].

W wieku XIX dzięki pracom M. Łobaczewskiego i J. Bolyaia powstała pierwsza geometria nieeuklidesowa, odmienna w swej aksjomatyce od geometrii Euklidesa. Badacze udowodnili niezależność V postulatu Euklidesa o równoległych od pozostałej grupy aksjomatów[16]. Miało to dla matematyki doniosłe znaczenie, gdyż w latach późniejszych rozwinęły się inne geometrie nieeuklidesowe.

> Stało się to bodźcem do zbadania struktury logicznej geometrii. Powstał nowy dział podstawy geometrii, w którym geometrię traktuje się jako pewien system dedukcyjny. Przyjmuje się mianowicie pewną liczbę pojęć pierwotnych, których własności są opisane przez twierdzenia podstawowe przyjęte bez dowodu – tzw. aksjomaty (pewniki). Inne pojęcia definiuje się za pomocą pojęć pierwotnych i pojęć zdefiniowanych wcześniej, a z aksjomatów – stosując reguły logiki – otrzymuje się nowe twierdzenia[17].

Na współczesne rozumienie geometrii elementarnej duży wpływ miały prace Ł. A. Kogana, jako inicjatora przyjęcia odległości za pojęcie podstawowe w geometrii elementarnej[18], M. Pierii, H. Wayla i F. Bachmanna.

W świetle koncepcji zapoczątkowanej przez H. Wayla, a następnie rozwiniętej przez J. Dieudonnégo geometria elementarna i algebra liniowa różnią się tylko językami. To odkrycie i idąca za nim możliwość wchłonięcia geometrii przez algebrę liniową, zdaniem I. Gucewicz-Sawickiej, pomniejszyło i tak już stosunkowo

---

13 http://pl.wikipedia.org/wiki/Intuicjonizm_%28matematyka%29 , data dostępu: 28.03.2013.

14 R. Murawski, *Filozofia matematyki*, s. 128.

15 I. Gucewicz-Sawicka (red.), *Podstawowe zagadnienie dydaktyki matematyki,* PWN, Warszawa 1982, s. 311.

16 *Ibidem.*

17 W. Waliszewski (red.), *Encyklopedia szkolna...,* s. 193.

18 *Geometria elementarna* – pojęcie to za sprawą Z. Krygowskiej odgrywa podstawową rolę w podręcznikach dla liceum.

niewielkie znaczenie geometrii wśród innych nauk matematycznych i wpłynęło na jej degradację[19].

W dzisiejszych czasach geometrię euklidesową ujmuje się wielorako. W szczególności jedno ujęcie ma charakter wektorowy, drugie – metryczny, mnogościowy, w którym dopuszczalne jest badanie figur przy posługiwaniu się liczbami, wektorami, równaniami i przekształceniami geometrycznymi.

1.3. CELE KSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNEGO

Niniejszy podrozdział traktuje o współczesnym rozumieniu geometrii jako nauki oraz przedmiocie jej zainteresowań. Przedstawiam tu rozumienie geometrii jako nauki oraz źródła pierwszych pojęć matematycznych. Poszukuję odpowiedzi na pytanie, czemu służy nauczanie geometrii na etapie edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej.

Zdaniem wielu współczesnych badaczy, np. E. Swobody[20], J. Filipa i T. Ramsa[21], M. Hejný'ego[22], geometrię należy rozumieć jako naukę o przestrzeni i kształtach. W wielu koncepcjach zwraca się uwagę na te elementy, chociaż są one różnie rozumiane. Przykładowo:

> Geometria to świat geometrycznych obiektów, relacji powstałych w procesie matematyzowania i porządkowanych na przykład przez system aksjomatów; rozumowanie przestrzenne to różnorodne procesy, w trakcie których dochodzi do manipulowania obiektami myślowymi, do tworzenia obrazów różnych relacji i obiektów; a przestrzeń geometryczna nie jest traktowana jako geometryczny twór, jest przede wszystkim sceną, na której odgrywają się dynamiczne transformacje i mają miejsce relacje między obiektami. Tak oto, zgodnie z tym poglądem: geometria to świat faktów i zjawisk wywiedzionych z systemu aksjomatów, zaś przestrzeń jest postrzegana jako obszar, w ramach którego odbywają się dynamiczne procesy rozumowań[23].

---

19 I. Gucewicz-Sawicka (red.), *Podstawowe zagadnienie dydaktyki matematyki,* s. 312.
20 E. Swoboda, *Przestrzeń...,* s. 54.
21 J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie...,* s. 133.
22 M. Hejný, *The Understanding Of Geometrical Concept, Proceedings of the 3rd Bratislava International Symposium on Mathematical Education*, BISME 3, Comenius University, Bratislava 1993.
23 E. Swoboda, *Przestrzeń...,* s. 54.

W podejściu reprezentowanym przez H. Freudenthala i Z. Krygowską wyraźnie odróżnia się abstrakcyjną geometrię pojmowaną jako naukę dedukcyjną od rzeczywistego świata jako źródła pierwszych pojęć geometrycznych, stąd opinia, że „geometria jest jedną z najlepszych okazji do matematyzowania rzeczywistości”[24]. W takim rozumieniu przestrzeń jest traktowana jako fizyczna, ta, w której dziecko żyje.

Współcześni dydaktycy matematyki, rozważając, czym są kształty i przestrzeń, badane za pomocą różnych metod, ujmują je w zakresie trzech perspektyw, w których charakteryzują:

- interakcje zachodzące pomiędzy realnymi kształtami w przestrzeni – ta perspektywa dotyczy umiejętności zrozumienia otaczającego świata, możliwości jego opisu, kodowania i dekodowania informacji, które do nas docierają, i interpretowania ich;
- kształty i przestrzeń jako fundamentalne składniki do tworzenia teorii – nawiązując do tego, że tradycyjna geometria euklidesowa wywodzi się z obserwacji i opisu otaczającego świata;
- kształt lub wizualną reprezentację dla lepszego zrozumienia pojęć, procesów, zjawisk istniejących w różnych dziedzinach matematyki i nauki w ogóle – która odwołuje się do roli wizualizacji w uczeniu się i nauczaniu matematyki i reprezentacji poznawczych typowych dla percepcyjnego odbioru[25].

Niezależnie od dywagacji na temat ujmowania kształtów i przestrzeni poznawanie świata geometrii związane jest z budowaniem i rozumieniem pojęć geometrycznych. W jego obrębie funkcjonują tzw. pojęcia pierwotne, niedefiniowane, a poznawane przez ich właściwości. Pozostałe pojęcia geometryczne są definiowane, twierdzenia zaś udowadniane drogą dedukcji. W odniesieniu do procesu tworzenia się w umyśle pojęcia matematycznego Z. Krygowska podkreśla:

> [...] jedyna rozsądna droga wychodząca z przestrzennych doświadczeń dziecka i prowadząca do matematycznej struktury zwanej geometrią to rozumienie geometrycznych pojęć jako abstrakcyjnych schematów tworzonych z całą świadomością ich upraszczającego w stosunku do sytuacji życiowej i konwencjonalnego, choć mającego ogromne praktyczne zastosowania, znaczenia[26].

A. Szemińska zaś podaje:

> Pojęcia geometryczne dotyczą stosunków przestrzennych, a więc są bardzo silnie związane z cechami spostrzeganymi. Jednakże ani samo spostrzeganie, ani obrazy umysłowe nie wystarczają do ukształtowania abstrakcyjnych pojęć geometrycznych [...]. Dla geometrii ważne jest rozumienie wzajemnych związ-

---

24 *Ibidem.*
25 *Ibidem.*
26 *Ibid.*, s. 57.

> ków pomiędzy figurami, między ich wymiarami i ich częściami. Istotne są przekształcenia, w wyniku których cechy figur zmieniają się, ale pewne stosunki pozostają niezmienne[27].

Geometria bada i opisuje własności figur oraz związki zachodzące między figurami. Wszystkie bowiem przedmioty (ciała) w otaczającym świecie mają trzy wymiary: długość, szerokość i wysokość. W przypadku braku wymiaru wysokości możemy mówić o przestrzeni dwuwymiarowej (długość i szerokość), płaszczyźnie, w której są, np. kwadrat, odcinek, okrąg. Oddzielenie tych obszarów wyznacza standardy nauczania geometrii i kształtuje dwie koncepcje edukacyjne. Pierwsza polega na separowaniu problemów geometrii płaskiej i przestrzennej, druga – na równoległym nauczaniu planimetrii i stereometrii. Drugi nurt, zwany fuzjonizmem, głosi, że połączone nauczanie-uczenie się pozwala uczniowi głębiej wnikać w konstrukcję geometrii, umożliwia wcześniejszy rozwój wyobraźni przestrzennej, gdyż ta kształtuje się w toku poznawania brył oraz pozwala na integrowanie różnych działów matematyki szkolnej[28].

W edukacji przedszkolnej i szkolnej geometria ma służyć wprowadzaniu dziecka w matematyczne ujmowanie stosunków przestrzennych świata i poznawaniu narzędzi pozwalających opisywać świat. Według Z. Semadeniego[29], J. Filipa i T. Ramsa[30] geometria zaczyna się od poznawania i modelowania rzeczywistości w zakresie jej przestrzennych stosunków. Dziecko obserwuje otaczający je świat, kształty, ich wzajemne położenie, zmiany w położeniu, w kształtach, oddziaływuje na istniejące już konfiguracje przestrzenne, manipuluje, konstruuje przedmioty z różnych elementów, rysuje, używa przedmiotów w działaniu – wszystko to, co stanowi bogaty materiał doświadczeń, który prowadzi od naiwnego schematyzowania geometrycznego do coraz bardziej abstrakcyjnego opisu stosunków przestrzennych.

G. Treliński określa współcześnie następujące cele edukacji geometrycznej dzieci, pisząc:

> Wprowadzając dzieci w świat szeroko rozumianej geometrii, chcemy ich uczyć:
> - geometrycznego ujmowania przestrzennych stosunków świata rzeczywistego;
> - posługiwania się językiem matematyki w różnych jego formach z wykorzystaniem słów, symboli i elementów niewerbalnych (rysunków, schematów);
> - tworzenia w myśli wyobrażeń o abstrakcyjnych figurach i związkach między nimi oraz rozwijania intuicji (wglądu), która pozwala ogarnąć układ stosunków występujących w danej sytuacji i podjąć działanie;

---

27 *Ibid.*, s. 139.
28 J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie...*, s. 151.
29 Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki,* t. 4, WSiP, Warszawa 1984.
30 J. Filip, T. Rams, *Dziecko świecie..*, s. 135.

- aktywnego podchodzenia do zadań matematycznych, a w szczególności geometrycznych. Te zadania, w odróżnieniu od zadań arytmetycznych mają, jak mówimy, charakter wielopoziomowy. Można dochodzić do ich rozwiązań na różnych poziomach: empirycznie, wykorzystując modele i rysunki, posługując się analogią, indukcją i intuicją, albo też formalnie[31].

Zintegrowana edukacja początkowa powinna zatem sprzyjać uporządkowaniu, pogłębianiu i poszerzaniu umiejętności dzieci w zakresie analizowania kształtu przedmiotów, badania, jak zmieniają się one przy przekształceniach, powinna stwarzać okazje do rozpoznawania, reprodukowania i poznawania sposobów graficznego ujmowania stosunków realnego świata. W jej toku dziecko powinno opisywać i nazywać kształty przedmiotów, posługując się językiem matematyki. Celem działań nauczyciela jest kształtowanie rozumienia wybranych figur geometrycznych, stwarzanie uczniom okazji do odkrywania ich właściwości, pamiętając przy tym o wiązaniu treści arytmetycznych z geometrycznymi[32].

W przedszkolu będzie do tego okazja przy realizacji zagadnień wynikających z podstawy programowej, na przykład doskonaląc dziecięce umiejętności: „grupowania obiektów w sensowny sposób, formułowania uogólnień typu, to do tego pasuje, te obiekty są podobne, a te inne; a w szkole: klasyfikowania obiektów, dostrzegania symetrii, mierzenia, posługując się linijką, porównywania długości obiektów, ważenia przedmiotów, różnicowania przedmiotów itp.". Natomiast cele typu: posługiwanie się specyficznym językiem geometrycznym i matematycznym w różnych jego formach oraz kształtowanie wyobraźni oraz intuicji, podstawa programowa ujmuje w języku wymagań następująco:

> [uczeń] rozumie sens informacji podanych w formie uproszczonych rysunków oraz często stosowanych oznaczeń i symboli, przewiduje w miarę swoich możliwości, jakie będą skutki czynności manipulacyjnych na przedmiotach, wnioskuje, stara się łączyć przyczynę ze skutkiem i próbuje przewidywać, co się może zdarzyć[33].

Podsumowując: nauczyciel, realizując cele kształcenia geometrycznego, powinien rozwijać u wychowanka aktywność geometryczną, w toku której zarówno kształty, jak i przestrzeń stają się obiektami obserwacji, myślenia, twórczego działania. Powinien wyzwalać emocje i działania wobec zadań typu geometrycznego, stwarzając tym samym okazję do posługiwania się językiem geometrii.

---

31 G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna*, *3M Matematyka, Modelowanie, Metodyka,* Naukowe Wydawnictwo Piotrkowskie, Piotrków Trybunalski 2011, s. 157.

32 *Ibid.*, s. 157–158.

33 Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z dnia 15 stycznia 2009).

2. TREŚCI GEOMETRYCZNE W EDUKACJI DZIECKA NA PRZEŁOMIE WIEKÓW

Treści geometryczne były przedmiotem edukacji dzieci na przestrzeni wieków. Potrzeba rozwijania aktywności badawczej o charakterze geometrycznym, akcentowana przez wielu wybitnych pedagogów, znalazła swoje miejsce w ich poglądach i koncepcjach programowych. Z tego powodu niniejszy rozdział stanowi przegląd zagadnień programowych związanych z geometrią. Przedstawiam tu w porządku chronologicznym poglądy pedagogiczne na naukę geometrii od starożytności do XVIII wieku, w wieku XIX i początkach XX, w XX wieku oraz treści geometryczne w programach XXI wieku. Zawartość merytoryczna i konstrukcja rozdziału wynika ze spostrzeżenia, że zagadnienia geometryczne były na przestrzeni wieków ważne i postrzegano je jako edukacyjnie istotne uwarunkowania rozwoju myślenia logicznego i systemu wiedzy dziecka o świecie.

2.1. GEOMETRIA W POGLĄDACH PEDAGOGICZNYCH OD STAROŻYTNOŚCI DO XVIII WIEKU

Pierwsze podstawy teoretyczne wychowania instytucjonalnego zgodnie z określonym programem sformułował wybitny grecki filozof Platon (427–347 p.n.e.). Był on zdania, że dzieci od 3. do 6. roku życia powinny być pod opieką specjalnie dobranych piastunek, których głównym zadaniem było kierowanie zabawami dzieci i utrzymywanie dyscypliny. Piastunki powinny dostarczać dzieciom narzędzi (wzorowanych na prawdziwych) i rozwijać zdolność posługiwania

się nimi. Jak podaje W. Bobrowska-Nowak, przyszłym budowniczym np. należało umożliwić stawianie domków dziecinnych[1]. Zdaniem Arystotelesa (384–322 p.n.e.) pierwszy etap życia dziecka – do 5. roku, powinna wypełniać zabawa, a dorosły powinien podtrzymywać u dziecka naturalną chęć obserwowania otoczenia. Podczas kolejnych dwu lat dziecko powinno być przygotowywane do nauki szkolnej przez przysłuchiwanie się lekcjom gramatyki, rysunku i muzyki rodzeństwa i innych dzieci.

Kontynuatorem myśli filozoficznej Platona i Arystotelesa był Plutarch (50–120 n.e.), autor rozprawy *O wychowaniu dzieci*, w której podkreślał rolę rodziców w rozwoju najmłodszych oraz planowe kształcenie woli, charakteru i umysłu dziecka. Akcentował, że „najwyżej należy cenić wykształcenie umysłowe, gdyż ono rozwija najświetniejsze zalety ludzi – ich rozwagę i rozum"[2] .

Marek Fabiusz Kwintylian (ok. 35–ok. 95), jako jeden z pierwszych autorów praktycznych wskazówek dotyczących edukacji dzieci, pisał w najwybitniejszym traktacie pedagogicznym starożytnego Rzymu *Kształcenie mówcy*:

> Co do nauki geometrii twierdzą niektórzy, że ma ona pewną stronę dodatnią, przynoszącą chłopcom w młodym wieku pożytek. Przyznają mianowicie, że pobudza umysły, zaostrza zdolności, i że stąd rodzi się u chłopców bystrość w pojmowaniu wiedzy, ale zauważają przy tym, iż korzyść z niej mamy nie tak jak z innych umiejętności, dopiero wtedy, gdy je opanujemy, lecz podczas samej nauki[3].
> Niezbędny jest w geometrii ścisły porządek i następstwo działań. Geometria na podstawie poprzednich danych udowadnia następne, jak również to, co nie jest pewne, wyprowadza z tego, co jest wiadome. Poza tym geometria wykazuje też przy pomocy odpowiedniej metody fałszywość rzeczy na pozór podobnych do prawdy[4].

Kwintylian podkreślił wartość geometrii nie tylko jako nauki praktycznej i użytecznej, dostrzegł jej także stymulującą rolę już w trakcie procesu uczenia się.

W okresie późnej starożytności i średniowiecza geometria znalazła swoje miejsce w grupie tzw. *artes liberales* i stała się jedną z siedmiu sztuk wyzwolonych, będących podstawą wykształcenia wybranych jednostek. M. Terenius Varro (116–27 p.n.e.) wymienia więc: gramatykę, dialektykę, retorykę (jako tzw. *trivium*) oraz geometrię, arytmetykę, astronomię i muzykę (*quadrivium*).

---

1 W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. I, WSiP Warszawa, 1978, s. 19.

2 *Ibid.*, s. 26.

3 S. Wołoszyn, *Źródła do dziejów wychowania i myśli pedagogicznej*, t. 1, PWN, Warszawa 1965, s. 137.

4 *Ibid.*, s. 138.

Po rozpadzie cesarstwa rzymskiego i upadku ustroju niewolniczego nastąpił okres stosunków feudalnych, szkolnictwo rzymskie utrzymało się w nielicznych ośrodkach Europy i wykształcił się nowy, praktyczny typ średniowiecznego wykształcenia. Chrześcijaninowi z niższych warstw społecznych potrzebna była jedynie znajomość pacierza i głównych zasad wiary katolickiej, co miał zapewnić dom rodzinny oraz przekaz duchownych w kościele. Po 7. roku życia dzieci z rodzin szlacheckich oddawano na dwór magnacki, a dzieci mieszczańskie – na praktykę rzemieślniczą. Katedralne, kolegiackie, klasztorne szkoły średniowieczne były prowadzone przez duchowieństwo i kształciły młodzież do stanu duchownego. Geometria jako nauka pomiaru ziemi, pomimo to, że stanowiła element *quadrivium*, nie miała dla kleru większego praktycznego znaczenia i uczono jej w wąskim zakresie[5].

Epoka odrodzenia przyniosła ze sobą wzrost świadomości i wiedzy o człowieku. Nastąpił wówczas wielki zwrot w kierunku człowieka i jego człowieczeństwa, przywrócono należytą rangę dzieciństwu, podkreślano wagę warunków prawidłowego rozwoju i wzrostu dziecka z wyraźną tendencją odejścia w procesie wychowania od kar cielesnych.

Wybitny humanista okresu odrodzenia Erazm z Rotterdamu (1465–1536) podkreślał potrzebę rozwijania umysłu dzieci od najmłodszych lat przez wykorzystanie bajek, obrazków i gier w serdecznym i bliskim kontakcie nauczyciela z wychowankiem. Rolę zmysłów i obserwacji w poznawaniu otaczającego świata akcentował natomiast Jan Ludwik Vives (1492–1540).

Jan Amos Komeński (1592–1670), określany jako największy pedagog dziejów wychowania, czołowy reformator szkolnictwa swojej epoki, stworzył ideę szkoły elementarnej, do której miały uczęszczać dzieci pomiędzy 6. a 12. rokiem życia. Jego dzieło *Wielka dydaktyka* to jeden obszerny program nauczania, w którym ważne miejsce pełni wychowanie moralne i umysłowe. Pedagog podkreślał trzy drogi poznawania rzeczywistości, które „dostarczają dziecku podstawowych doznań i pobudzają do czynności rękę, mowę i rozum. Należą do nich: poznawanie rzeczy za pośrednictwem zmysłów, aktywność dziecka (wykonywanie czynności i wytwarzanie przedmiotów) oraz mówienie"[6]. W dziele *Nowa metoda nauki* J. A. Komeński wskazał metody i środki zdobywania umiejętności. Pisał, że głównym przedmiotem poznania powinna być przyroda, a drogi do owego poznania wiodące to obserwacja i doświadczenie.

Okres wczesnego dzieciństwa J. A. Komeński podzielił na sześć klas szkoły macierzyńskiej. Pierwsza to połóg, druga to czas karmienia, trzecia to klasa gaworzenia i pierwszych kroków, czwarta – mówienia i spostrzegania, piąta –

---

5 *Ibid.*, s. 164.

6 W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów...*, cz. I, s. 49.

obyczajów i pobożności, szósta – pierwszej szkoły zespołowej, czyli początkowej nauki, przygotowującej dzieci do szkoły publicznej.

Wychowanie dzieci w szkole macierzyńskiej obejmowało naukę podstaw arytmetyki, geometrii i muzyki – sztuk, które służą człowiekowi przez całe życie. Geometria traktowana była jako nauka nabywania umiejętności mierzenia długości, szerokości, odległości. W dziele *Szkoła dziecieństwa, czyli o przewidującym wychowaniu dzieci w pierwszych sześciu latach*, czytamy: „Z geometrii dziecko dowie się, co jest małe lub duże, krótkie lub długie, wąskie lub szerokie, cienkie, albo grube, także co nazywamy palcem, łokciem, krokiem”[7].

Według J. A. Komeńskiego:

> Pierwsze zaczątki geometrii mogą się pojawiać w drugim roku życia, a mianowicie, co nazywamy wielkim, a co małym później łatwo zrozumieją, co jest krótkie, a co długie, wąskie. W czwartym roku życia wystarczy, jeśli poznają różnice pomiędzy niektórymi figurami, np. co nazywamy kołem, a co linią, co krzyżem, a potem nazwy często używanych miar, jak cal (palec), dłoń, piędź, łokieć, krok, funt (libra), halerz, kwarta, a jeśli coś więcej nasunie się ich uwadze, zaczną na własną rękę próbować mierzyć, ważyć i jedno z drugim porównywać[8].

Przegląd źródeł wskazuje, że w budowaniu podwalin teorii konstruktywizmu i zasad edukacji geometrycznej miał swój udział również Jan Jakub Rousseau (1712–1778) – wybitny filozof okresu oświecenia. W dziele *Emil, czyli o wychowaniu,* myśliciel pisał:

> Wychowują nas i natura, i ludzie, i rzeczy. Rozwój wewnętrzny zdolności naszych i organów jest wychowaniem, które pochodzi od natury. Sposób korzystania z tego rozwoju, sposób, którego nas uczą, jest wychowaniem otrzymanym od ludzi; zasób wreszcie własnego doświadczenia w stosunku do przedmiotów nas otaczających jest wychowaniem otrzymanym od przedmiotów[9].

Postępowym pedagogiem i pisarzem szwajcarskim, który tworząc teorię kształcenia dzieci, zwrócił uwagę na treści geometryczne, był Jan Henryk Pestalozzi (1746–1827)[10]. Był on zdania, że metoda pracy z dzieckiem w wieku przedszkolnym powinna opierać się na postrzeganiu przedmiotów, a w procesie tym, połączonym skutecznie z zabawą, dziecku powinna towarzyszyć matka. W dalszej

---

7 *Ibid.*, s. 6.

8 W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. II, WSiP Warszawa 1978, s. 9–10.

9 Ead., *Zarys dziejów...,* cz. I, s. 69.

10 Fragment opisujący koncepcję kształcenia J. H. Pestalozziego pochodzi z mojego opracowania: B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji dzieci...*, s. 282.

kolejności nauczanie powinno mieć charakter planowy i obejmować naukę postrzegania kształtów, stosunków miarowych, rysunku i stosunków liczbowych.

Postrzeganie kształtów, zdaniem J. H. Pestalozziego, jest podstawą wszystkich kunsztów i rzemiosł. Potrzebne jest ono w architekturze, malarstwie, mechanice, rysunku, pisaniu, pracach rzemieślniczych. Pedagog zalecał, by dzieci poznawały linie proste, równoległe, łuki, kąty, trójkąty, kwadraty i inne figury, porównywały przedmioty, „oceniały na oko", posługując się określeniami ogólnymi (mniejszy, większy) i innymi, bardziej precyzyjnymi. Pomocą naukową J. H. Pestalozziego był kwadrat, jako „abecadło oglądu i arytmetyki". Uczył on umiejętności wydawania sądu o kształcie innej figury w stosunku do figury pierwotnej – kwadratu. Zdaniem tego pedagoga dziecko, formułując sądy – w procesie poznawania rzeczywistości, opiera się na trzech podstawowych elementach występujących we wszystkich rzeczach, tj. liczbie, kształcie i nazwie przedmiotu, a odtwarzanie kształtów można utrwalać przez rysowanie (co jednocześnie przygotowuje rękę do pisania)[11].

* * *

Praktyczne i edukacyjne znaczenie geometrii, podkreślane już przez starożytnych i nowożytnych filozofów i pedagogów, ugruntowało się w kolejnych wiekach. Akcentowana przez myślicieli waga postrzegania, jako głównej drogi poznawania kształtów, miary i liczby w kontakcie dziecka z przyrodą i przedmiotami z bliskiego otoczenia, pozostała aktualna po dziś dzień. Geometrię traktowano również jako skuteczny sposób rozwijania myślenia. Podkreślano aktywność, którą w dzisiejszych czasach nazywamy aktywnością matematyczną, a rozwijanie jej, czyli aktywizowanie, uznano za ważny cel oddziaływań pedagogicznych.

2.2. MIEJSCE GEOMETRII W KONCEPCJACH PEDAGOGICZNYCH W XIX I PIERWSZEJ POŁOWIE XX WIEKU

W państwie polskim warunki do realizacji idei oświecenia i przeprowadzania refom edukacyjnych były bardzo utrudnione. Przełomem było powołanie

---

[11] W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów...*, cz. I, s. 80–81.

14 października 1773 roku pierwszej państwowej świeckiej władzy szkolnej – Komisji Edukacji Narodowej, i podjęcie publicznej debaty nad poprawą edukacji w Polsce. Do głównych zmian tego okresu należy zaliczyć: dążenie do zniesienia różnic stanowych w zakresie prawa do oświaty, zorganizowanie świeckiego kształcenia nauczycieli, opracowanie programów nauczania opierając się na postępowych hasłach oświecenia, powoływanie i reformowanie szkół parafialnych, podwydziałowych i wydziałowych Akademii Krakowskiej i Akademii Wileńskiej[12]. Na przełomie wieków XIX i XX polscy pedagodzy, literaci, arystokraci uaktywnili swoją publicystyczną i społeczną działalność, co spowodowało ożywienie i skierowanie uwagi na dziecko oraz badanie uwarunkowań jego rozwoju. W ośrodkach wiejskich i przemysłowych zaczęły powstawać pierwsze placówki przedszkolne, tzw. ochronki, wydawane zostały publikacje pedagogiczne, książeczki i pierwsze czasopisma dla dzieci. Powoli rozwijała się polska myśl pedagogiczna, głównie pod wpływem działalności edukacyjnej i społecznej europejskich pedagogów – Roberta Owena, Jana Fryderyka Oberlina, Marii Pepé-Carpanier, Fryderyka Fröbla, Jana Svobody czy Marii Montessori.

Na przełomie XIX i XX wieku uczono geometrii jeszcze na podstawie *Elementów* Euklidesa, ale w latach 30. XX wieku wiedza matematyczna zgromadzona przez stulecia podległa strukturalizacji i usystematyzowaniu dzięki grupie matematyków (głównie francuskich) występujących pod nazwą Nicolas Bourbaki (zwanych bourbakistami)[13]. Grupa ta opracowała w ponad trzydziestu tomach dzieło *Eléments de mathématiques*, a jej działalność (trwająca do lat 60. XX wieku) wywarła duży wpływ na nauczanie tego przedmiotu na całym świecie.

Jako prekursorów dziecięcej edukacji geometrycznej w Europie przełomu wieków należy uznać Friedricha Fröbla[14] i Marię Montessori.

12 *Ibid.,* s. 87.

13 J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie...,* s. 16.

14 W polskich źródłach możemy spotkać różne zapisy imienia i nazwiska: np. Fryderyk Froebel w publikacjach J. Strzemeskiej i M. Weryho (*Wychowanie przedszkolne. Podręcznik dla wychowawców,* Księgarnia Teodora Paprockiego i S-ki, Warszawa 1895); S. Wołoszyna (*Źródła do dziejów wychowania i myśli pedagogicznej*, t. 1, PWN, Warszawa 1965, s. 77–88.); Fryderyk Fröbel – w opracowaniach W. Bobrowskiej-Nowak (*Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. I i II, WSiP, Warszawa 1978). W zagranicznych publikacjach: Friedrich Froebel – w książce M. Jo Pollman (*Blocks and Beyond*, Paul H. Brookes Publishing cl., Baltimore 2010), T. Bruce (*Early Childhood practice. Froebel today*, SAGE, London 2012) czy B. von Marenholtz-Bülow, *How kindergarten came to America, Friedrich Freobel's radical vision of early childhood education*, The New Press, New York 2007, współczesny przedruk publikacji z 1895 roku. H. Heiland, *Friedrich Fröbel (1782–1852),* „Kwartalnik Pedagogiczny" 2000, nr 1/2, s. 45.

2.2.1. KONCEPCJA EDUKACJI SFERYCZNEJ FRIEDRICHA FRÖBLA

Jedną z ważnych postaci XIX i XX wieku, której poglądy i osiągnięcia ukształtowały praktykę edukacyjną w zakresie geometrii, szczególnie w Niemczech, Wielkiej Brytanii i Stanach Zjednoczonych, był Friedrich Wilhelm August Fröbel (1782–1852), nazywany współcześnie ojcem i prorokiem nowożytnego wychowania przedszkolnego. Został on poznany jako twórca instytucji wychowawczych dla dzieci 3–6-letnich, nazywanych *ogródkami dziecięcymi*, i kreator oryginalnego systemu metodycznego opartego na zabawowej i zajęciowej samodzielności oraz aktywności dziecięcej[15].

„Wychowanie i nauczanie ogródkowe" F. Fröbel oparł na metodyce zabaw i zajęć dziecięcych z wykorzystaniem darów natury, celowo dobranych klocków oraz opracowanych w tym celu piosenek. Zdaniem F. Fröbla najlepszym źródłem materiałów do zabaw jest natura. Dziecko, bawiąc się kamieniami, patykami, nasionami, owocami, ziemią, piaskiem, gliną, śniegiem, bada struktury i kształty. Ale jeśli nie trafi na odpowiednie przedmioty, takie, które będą w pełni służyły jego rozwojowi, to zadaniem dorosłego jest podsuwanie mu odpowiednich materiałów edukacyjnych. Takie środki dydaktyczne pod postacią piłek, klocków i mozaik F. Fröbel nazwał darami. Podstawowe elementy, które tworzą zestaw dydaktyczny darów, to bryły, takie jak: kula, sześcian i walec[16].

Kula, zdaniem F. Fröbla, to bryła podstawowa, kształt idealny i jednocześnie najważniejszy. Obrazuje ona ruch i określana jest jako tzw. teza. Uosabia wszechświat, który cechuje: jedność, wielość, spoczynek i ruch. Odwrotnością kuli jest sześcian, jest on swego rodzaju antytezą, symbolem jedności i spoczynku. Istnieje jeszcze kształt pośredni, stworzony z kuli i sześcianu, bryła łącząca ruch kuli i stateczność sześcianu. Jest nią walec. Trzy bryły: kula, walec i sześcian, ustawione na sobie (kula na walcu, walec na podstawie sześcianu), tworzą kolumnę, rozpoznawaną na całym świecie jako symbol edukacji fröblowskiej. Konstrukcja o tym kształcie znajduje się po dziś dzień na grobie Fröbla w Marienthal w Niemczech. Uważa się, że symbol ten reprezentuje wiedzę, piękno i życie, kula interpretowana jest jako symbol serca i emocji, sześcian to myśl i intelekt[17].

Darem pierwszym w zestawie Fröbla jest piłka. Jest ona skończonym w sobie kształtem, punktem wyjścia gier i zabaw ruchowych. W roku 1843 F. Fröbel wydał

---

15 S. Wołoszyn, *Źródła do dziejów wychowania i myśli pedagogicznej*, t. I, s. 77.

16 B. Bilewicz-Kuźnia, *Historyczny i współczesny obraz edukacji przedszkolnej według koncepcji Friedricha Wilhelma Fröbla* [w:] T. Parczewska, B. Bilewicz-Kuźnia, *Edukacja przedszkolna w Polsce i na świecie, wybrane zagadnienia*, UMCS, Lublin 2013, s. 39.

17 http://www.froebelweb.org/images/stein.html, data dostępu: 12.12.2013.

opracowanie pomocne w pracy z zastosowaniem pierwszego daru *Sto piosenek do gry w piłkę.* Pisał:

> Może się ona toczyć w kierunku poziomym, podrzucona – spadać pionowo lub zakreślać w powietrzu łuki; dzieci biegają za nią, podchwytują, rzucają, naśladują jej podskoki i to stanowi pierwsze zastosowanie daru w praktyce. Piłka ma nadto kształt okrągły; stąd wywiązują się gry kołowe, którym towarzyszy śpiew połączony z akcją naśladującą rozmaite czynności ludzi i zwierząt, o którym mówi piosenka. Wreszcie przerywane koło rozwija się w linię krzywą lub prostą; stąd od ruchów kołowych przejście do ruchów postępowych, czyli maszerowania bądź pojedynczo, bądź parami, bądź w zwartych więcej szeregach, a wszystko to z towarzyszeniem pieśni nuconej przez dzieci i poddającej pod pewną miarę rytmiczną wszystkie poruszenia ich ciała[18].

We współczesnych zestawach darów F. Fröbla pierwszy dar stanowi zestaw dwunastu piłek o sześciu barwach: trzech podstawowych (czerwona, żółta, niebieska) i trzech pochodnych (pomarańczowa, zielona, fioletowa). Piłki występują w parach w takim samym kolorze, różnią się tylko tym, że jedna z nich jest na sznurku, a druga nie.



▪ Fot. 7. Dar 1: Wełniane piłeczki[19]

Zabawa piłkami umożliwia poznawanie ogólnych własności przedmiotów, takich jak kształt, wielkość, barwa, liczba, materiał, miękkość. Dziecko, bawiąc się piłkami, ma okazję do posługiwania się językiem matematyki, buduje pojęcia matematyczne dotyczące wielkości, odległości, ciężaru, objętości, długości. Można określać położenie piłki, posługując się słowami: blisko, daleko, wysoko, nisko,

---

18 S. Wołoszyn, *Źródła do dziejów wychowania i myśli pedagogicznej*, t. 1, s. 82.

19 Fot. 7–12, przedstawiające dary, od fot. 1 do fot. 6 pochodzą z archiwum Froebel Polska, www.froebel.pl

szybko, wolno; śledzić wzrokiem jej ruch, opisując go słowami, np. skacze, toczy się, turla, spada; badać jej właściwości, np. okrągła, wełniana, drewniana, lekka, ciężka. Zabawom z piłkami mogą towarzyszyć piosenki, wierszyki, wyliczanki czy dłuższe teksty literackie.

Drugi dar stanowią kula, walec i sześcian. Kula jest bryłą, która nie ma „kątów i kantów", jej przeciwieństwem jest sześcian, który jest „obrazem spokoju"



▪ Fot. 8. Dar 2: Kula, walec, sześcian

i ma służyć jako przedmiot do poznawania stosunku różnych pojedynczych części do siebie, ich liczby oraz wprowadzenia dziecka w świat kształtów[20]. Bryły te wykorzystuje się do przeprowadzania badań i porównań, których celem jest odróżnianie form kulistych od graniastych, obserwowanie drogi i szybkości linii ruchu brył, określanie ciężaru.

Dar trzeci to osiem klocków sześciennych o wymiarach 2,5 × 2,5 × 2,5 cm, które po złożeniu w kostkę tworzą sześcian o objętości sześcianu z daru 2. Poznanie sześcianu ma istotne znaczenie, gdyż jest on podstawową bryłą konstrukcyjną. Fröbel był zdania, że dzieci lubią bawić się przedmiotami, które mogą składać i rozkładać. Pedagog proponował, by dzieci układały z małych sześcianów różne kształty i konstrukcje. Mogą to być kształty naturalne, zwane kształtami poznania, konstrukcje pozwalające ilustrować prawidłowości i działania matematyczne oraz kształty estetyczne.

> Kształty poznania lub matematyczne mają na celu rozwijanie myśli dziecięcej; kształty rzeczowe są odtwarzaniem przedmiotów rzeczywistego świata; kształty estetyczne otrzymują się przez systematyczne zestawianie części w jedną piękną całość[21].

[20] *Ibid*., s. 79.
[21] *Ibid*., s. 79.

Manipulowanie klockami umożliwia dzieciom porównywanie, liczenie, posługiwanie się pojęciami: *bok, brzeg, ściana, krawędź, wierzchołek, wysokość, szerokość, długość.*



▪ Fot. 9. Dar 3

Dar czwarty tworzy osiem prostopadłościennych klocków, które złożone w kostkę tworzą klocek wielkości sześcianu z daru 2 i kostkę sześcienną daru 3. Można zobaczyć, że klocki te powstały na skutek przecięcia sześcianu z daru 2 przez jedno przecięcie pionowe i trzy poziome.



▪ Fot. 10. Dar 4

Manipulacje prostopadłościanami z daru 4 i sześcianami z daru 3 umożliwiają czynienie spostrzeżeń, że klocki różnią się między sobą nie tylko wielkością, ale i kształtem. Konstruowanie z klocków budowli będących modelami znanych z życia kształtów oraz tworzenie ornamentów umożliwia budowanie w umysłach dzieci pojęcia *prostopadłościan*. Stwarza sposobność wyróżniania kształtu prostokąta, daje szansę na posługiwanie się słowami *krawędź, wierzchołek, ściana*, *pozio-*

mo, pionowo, płasko, leży, stoi itp.; umożliwia przeliczanie, intuicyjne poznawanie ułamków, kształtowanie pojęcia objętości. Jak podaje S. Wołoszyn[22], materiał ten w połączeniu z darem 3 pozwala wytwarzać wielką różnorodność kształtów.

Dar piąty to zestaw klocków złożony z trzech ich rzędów. Pierwszy rząd stanowi 9 sześcianów wielkości 2,5 × 2,5 × 2,5, drugi rząd tak samo, w trzecim rzędzie są 3 sześciany o wymiarach 2,5 × 2,5, 3 sześciany podzielone wzdłuż jednej z przekątnych na dwie trójgraniaste połówki, co daje łącznie 6 graniastosłupów, oraz 3 sześcianki podzielone na cztery części, dające łącznie 12 graniastosłupów. Dar 5 to już większy komplet klocków, które, złożone, tworzą kostkę o wymiarach 7,5 × 7,5 cm. Z klocków tego daru można układać bardzo dużo kształtów rzeczowych i estetycznych. Dzieci budują z nich złożone konstrukcje, zamki, wieże, mosty, bramy itp., tworzą ornamenty pasowe, budowane na bazie koła i krzyża, oraz poznają matematykę.



▪ Fot. 11. Dar 5

Dar szósty to zestaw klocków o objętości zestawu 5. W pudełku znajduje się 18 znanych z daru 4 prostopadłościanów o wymiarach 5 × 2,5 × 1,25 cm, które tworzą pierwszą warstwę klocków. Na drugą warstwę składa się 5 prostopadłościanów o wymiarach 5 × 1,25 × 1,25 cm oraz 3 klocki w kształcie prostopadłościanów o wymiarach 2,5 × 2,5 × 1,25. Trzecią warstwę stanowi 9 takich samych klocków o wymiarach 2,5 × 2,5 × 1,25.

Dzięki zabawie i pracy z darami dziecko zaznajamia się z własnościami brył, rozwija wyobraźnię przestrzenną, myślenie matematyczne i wrażliwość estetyczną. Może układać wyobrażone reprezentacje znanych w rzeczywistości kształtów, np. domek, kościół, stół, ławkę, piec, zamki. A gdy chcemy kształtować w jego umyśle pojęcie odcinka, linii i punktu, daje mu się do zabaw konstrukcyjnych patyczki,

22 *Ibid.*, s. 79.



▪ Fot. 12. Dar 6

piasek, szpilki i papier. Dziecko ma okazję doświadczać poprzez nakłuwanie szpilką dziurek w papierze kilkunastu punktów obok siebie, a tworząc przecinające się linie, intuicyjnie poznaje, czym jest płaszczyzna. Łączenie punktów różnobarwną nitką, czyli wyszywanie, jest kolejnym aktywnym sposobem uczenia się geometrii, innym jest wyplatanie kolorowymi paskami. F. Fröbel podkreśla:

> W wyplataniu łączą się ze sobą liczba, kształt i barwa. Bez znajomości liczenia niemożebne jest wyplatanie, a zarazem jest ono środkiem najprzystępniej uzmysławiającym pierwsze poznanie liczb, gdy dziecię przybiera najprzód po jednym pasku, potem po dwa, trzy itd. Przy wyplataniu konieczne jest zastosowanie prawa przeciwieństwa. Jakoż jedne paski układają się w kierunku pionowym, drugie służą do przetykania w kierunku poziomym; pierwsze mogą być czarne, drugie białe lub w rozmaitych dobierane kolorach. Wyplatanie jest też naśladownictwem tkactwa[23].

F. Fröbel zapoczątkował również zabawy w budowanie konstrukcji płaskich i przestrzennych z kulek i patyków (współczesne klocki *Magnetix*) oraz papieru. Proponował, by zaostrzone patyczki łączyć za pomocą rozpęczniałych ziarenek grochu i budować np. kształt kwadratu, z sześciu model sześcianu itp., zaś z użyciem kwadratowej kartki papieru, poprzez zaginanie i składanie na różne sposoby, poznawać wszystkie formy trójkąta.

W koncepcji systemu wychowania i nauczania F. Fröbel podkreślał poglądowość i aktywność dziecka, oparte na zasadzie swobody przy jednoczesnym trzymaniu się narzucanych przez nauczyciela prawideł i reguł dydaktycznych. Pedagog upowszechnił ćwiczenia umysłu przez budzenie zmysłów, poznawanie cech

---

[23] *Ibid*., s. 80–81.




▪ Fot. 13, 14. Konstruowanie z grochu i patyków

przedmiotów i zjawisk, wspieranie wrodzonego zapału dziecka do działania przy użyciu darów, rozwijanie kompetencji społecznych i budzenie uczuć religijnych. Programowe treści edukacyjne w ogródkach fröblowskich były bardzo ambitne i stymulujące rozwojowo. Już na etapie pierwszego szczebla dzieci miały okazję bawić się bryłami geometrycznymi, konstruować proste budowle z użyciem darów od I do III, doskonalić zmysły w zabawie manipulacyjnej, układać przedmioty, modelować. Nauczycielka stawiała im zadania percepcyjno-manipulacyjne, polegające na splataniu i wiązaniu. Do 5. roku życia dzieci kontynuowały i doskonaliły poznawanie geometrii w działaniu, splatały wzory, wyszywały figury, bawiły się papierem, by reprodukować kształty znane im z codziennego życia oraz wytwarzać z wyobraźni nowe modele. Dzieci w wieku od 5. do 7. roku życia budowały złożone konstrukcje z prostopadłościanów, sześcianów i trójkątów, doskonaliły wyobraźnię przestrzenną przez składanie papieru, budowały znane oraz nowe formy płaskie i przestrzenne z papieru, klocków, patyków i ziaren grochu. W swoim systemie edukacyjno-wychowawczym F. Fröbel propagował twórczą geometrię. Ciekawymi formami rozwijania kreatywności w działaniach manualnych były wyplatanie, przeplatanie, wyszywanie, układanie z patyczków, modelowanie przy użyciu różnych materiałów i form.

Koncepcja programowa F. Fröbla u schyłku XIX wieku znalazła swoich gorących zwolenników i przeciwników. W Europie, a także w Polsce zaczęto prowadzić liczne kursy fröblowskie dla wychowawczyń ogródków, w USA powołany został Związek Fröblowski. H. Goldammer wydał książkę *Ogródek dziecięcy. Metoda wychowania, nauczania i zajmowania się dziećmi* – pozycję, która zawiera 80 instrukcji opisujących sposoby wykorzystania darów. Pod wpływem działalności F. Fröbla Maria Weryho (1858–1944) – prekursorka wychowania przedszkolnego w Polsce, otworzyła w Warszawie w 1887 roku pierwszy zakład fröblowski, przy którym prowadziła tajne kursy dla wychowawczyń przedszkola. Koncepcję wy-

chowania dzieci w wieku przedszkolnym według F. Fröebla M. Weryho opisała wraz z J. Strzemecką w pierwszej polskiej metodyce wychowania przedszkolnego *Wychowanie przedszkolne. Podręcznik dla wychowawców*[24] oraz w publikacjach wydawanych na łamach „Przeglądu Pedagogicznego" i „Wychowania w Przedszkolu". Koncepcja F. Fröbla znalazła również krytyków, do których należała Eugenia Konradi. W 1876 roku wydała ona książkę *Spowiedź matki,* w której ostro oceniła metodę. Tym samym wytworzył się klimat dla nowych metod edukacyjnych i wychowawczych. Z końcem XIX wieku we Włoszech skutecznie rozpoczęły działalność Róża i Karolina Agazzi oraz Maria Montesorii, o działalności której traktuje kolejny podrozdział[25].

2.2.2. MATERIAŁ DYDAKTYCZNY MARII MONTESSORI

Maria Montessori (1870–1952), włoska lekarka, nazwana przez „New York Tribune" najsłynniejszą kobietą Europy[26], opracowała własną koncepcję systemu edukacyjnego dla najmłodszych. Wprowadziła ją i udoskonalała w ośrodkach dla dzieci, tzw. domach dziecięcych (*Casa dei Bambini*), zakładanych od 1907 roku. Domy dziecięce odróżniała od ochronek organizacja przestrzeni, pracy oraz samodzielność dzieci. System cechował niski stopień ingerencji wychowawcy i wspieranie autonomii zgodnie z ponadczasową jego zasadą: „Pomóż mi zrobić to samemu". Sama M. Montessori głosiła, że świat dziecka powinien być uporządkowany, a otoczenie odpowiednio przygotowane, logicznie zorganizowane i estetyczne, zgodne z zasadą: „Im doskonalsze będzie otoczenie, tym bardziej osłabnie działanie dorosłych"[27]. Gdy otoczenie jest uporządkowane, dziecko jest także wewnętrznie uporządkowane.

W systemie M. Montessori geometria zajmuje ważne miejsce i związana jest z doskonaleniem zmysłów. Charakterystyczne jest tu rozwijanie wzroku, słuchu, dotyku, węchu i smaku. Ćwiczenia polegają na rozróżnianiu cech jakościowych przedmiotów. Aktywność dziecka skupiona jest na rozróżnianiu barw (podstawowych i pochodnych), wymiarów (długi–krótki, gruby–cienki, duży–mały, wysoki–niski, szeroki–wąski, głęboki–płytki), kształtów (figury–bryły), poznawaniu

---

24 J. Strzemeska, M. Weryho, *Wychowanie przedszkolne. Podręcznik dla wychowawców*, Księgarnia Teodora Paprockiego i S-ki, Warszawa 1895.

25 B. Bilewicz-Kuźnia, *Historyczny i współczesny obraz edukacji przedszkolnej według koncepcji Friedricha Wilhelma Fröbla*.

26 M. Jędrysik, *Paradoksy Marii Montessori,* „Wysokie Obcasy", 24.11.2012.

27 M. Montessori, *O swojej metodzie wychowawczej* [w:] W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. II, WSiP, Kraków 1978, s. 146.

i rozróżnianiu przez dotyk (faktury, temperatury, ciężaru)[28]. Nauka odbywa się w kontakcie z pomocami dydaktycznymi, nazwanymi przez M. Montessori materiałami. Są to pomoce i środki dydaktyczne opracowane z należytą starannością i logiką konstrukcyjną. Dzieci pracują z nimi indywidualnie na oddzielnych dywanikach, w ciszy i skupieniu. Materiał edukacyjny jest estetyczny, prosty i funkcjonalny. Dostarcza bodźców czuciowych, umożliwia różnicowanie wrażeń i przez to pomaga budować pojęcie matematyczne. Ogranicza się do jednej tylko trudności i umożliwia dziecku kontrolę błędów. Każdy środek dydaktyczny czemuś służy, ma cele edukacyjne.

Sposób wykorzystania go opiera się na ścisłej procedurze postępowania dydaktycznego. W pracy występują trzy etapy:

1. Kojarzenie percepcji zmysłowej z nazwą (np. Nauczyciel daje dziecku dwie płytki i mówi: *To jest kolor czerwony, to jest kolor niebieski,* a następnie kładzie je przed dzieckiem).
2. Poznawanie przedmiotu według nazwy (Nauczyciel mówi do dziecka: *Daj mi kolor czerwony, daj mi kolor niebieski*).
3. Wywoływanie nazwy według przedmiotu (Nauczyciel zadaje dziecku pytanie, pokazując przedmiot: *Co to jest*? Ono powinno odpowiedzieć: *Kolor czerwony, kolor niebieski*)[29].

M. Montessori spotkania z dzieckiem nazwała lekcjami. Podkreślała przy tym, że lekcja powinna być indywidualna, krótka, ale należy dołożyć w niej starań, aby „liczyć i ważyć słowa, z których ma się składać"[30]. Różnicowanie lekcji dotyczy poziomu trudności oraz form pracy z materiałem dydaktycznym. Początkowo powinny to być ćwiczenia podstawowe, następnie rozszerzające. Ważne formy to rozpoznawanie, np. poprzez dobieranie w pary; negacja, czyli wyszukiwanie kontrastów; kombinacja, jako tworzenie nowych możliwości; implikacja, czyli wyszukiwanie związków logicznych. Zasadą naczelną jest to, że wszystkie lekcje mają być proste i przedmiotowe. Osoba nauczyciela ma być w cieniu, a istotą lekcji ma być przedmiot, na który nauczyciel chce zwrócić uwagę dziecka.

Współcześni nauczyciele, chcąc pracować w tym systemie, mogą korzystać z programu wychowania przedszkolnego *Odkryjmy Montessori raz jeszcze*. Zagadnienia związane z geometrią pojawiają się w nim jako świat wymiarów, figur i brył oraz barw, poznawanych za pomocą zmysłów[31].

---

28 R. Czekalska, A. Gaj, B. Lauba, J. Matczak, A. Piecusiak, J. Sosnowska, *Odkryjmy Montessori raz jeszcze,* Of. Wyd. Impuls, Kraków 2010.

29 M. Montessori, *Domy dziecięce,* Wyd. Żak, Warszawa 2005, s. 102.

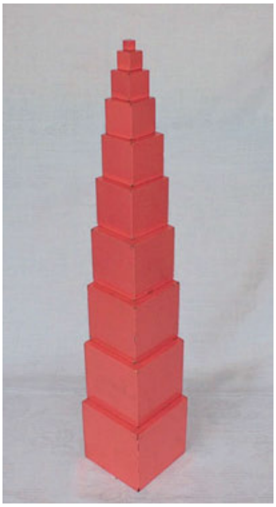
30 *Ibid.*, s. 67.

31 *Ibidem.*

Świat wymiarów

Wprowadzanie dziecka w świat wymiarów realizowane jest przy użyciu pomocy dydaktycznych, takich jak: *różowa wieża, brązowe schody, czerwone beleczki, cylindry* i *walce.* Sposoby wykorzystania materiału dydaktycznego do kształcenia zmysłów zostały dokładnie opisane przez S. Guz w publikacji *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole*[32]. Poniżej zaprezentuję wybrane środki dydaktyczne i sposoby ich wykorzystania.

- **Różowa wieża –** celem pracy z materiałem jest kształcenie pojęć: duży–mały, Przykłady pracy z materiałem:
- – odtwarzanie przez dziecko struktury, układanie klocków od najmniejszego do największego i odwrotnie;
- – układanie klocków w pionie od największego do najmniejszego i odwrotnie;
- – układanie klocków w poziomie od największego do najmniejszego i odwrotnie.



▪ Fot. 15. Materiał sensoryczny Różowa wieża

- **Brązowe schody –** celem pracy z materiałem jest kształcenie pojęć: gruby –cienki.
  Sposoby pracy z materiałem:
- – układanie różowej wieży i brązowych schodów na przemian w pionie i poziomie;
- – odtwarzanie struktury z zamkniętymi oczami;

---

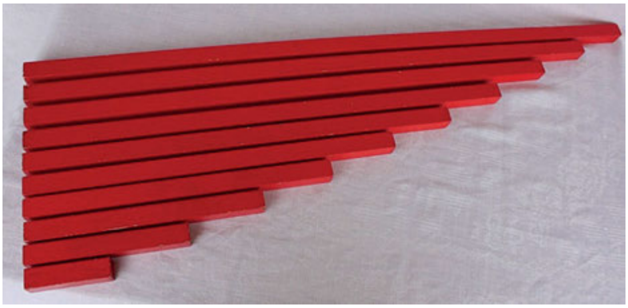
[32] S. Guz, *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole. Kształcenie i osiągnięcia*, Wyd. UMCS, Lublin 2006.



▪ Fot. 16. Materiał sensoryczny Brązowe schody

– rozróżnianie i nazywanie pojęć;
– odszukiwanie w otoczeniu przedmiotów o danych cechach;
– łączenie ze sobą różowej wieży i brązowych schodów w różnych konfiguracjach.

• **Czerwone beleczki –** celem pracy z materiałem jest kształcenie pojęć: długi –krótki.
  Przykłady pracy z materiałem:
– układanie kompozycji z wykorzystaniem innego materiału sensorycznego;
– układanie beleczek od najdłuższej do najkrótszej i odwrotnie.



▪ Fot. 17. Materiał sensoryczny Czerwone beleczki

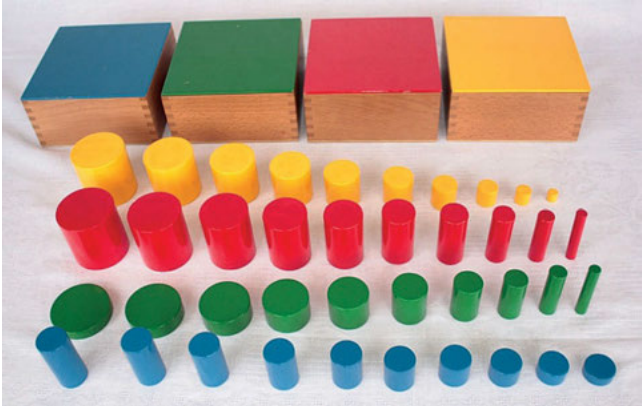
• **Cylindry –** celem pracy z materiałem jest kształcenie pojęć: gruby–cienki, wysoki–niski, szeroki–wąski, głęboki–płytki, duży–mały.
  Przykładowe sposoby pracy z materiałem:
– osadzanie cylindrów według określonej kolejności;
– osadzanie cylindrów z rozsypanki;

– osadzanie cylindrów z zamkniętymi oczami;
– posługiwanie się pojęciami dotyczącymi cech jakościowych;
– obrysowywanie cylindrów;
– łączenie ze sobą cylindrów i walców w różnych konfiguracjach;
– klasyfikowanie cylindrów według określonej cechy, np. dobieranie w pary, łączenie w zbiory.



▪ Fot. 18. Materiał sensoryczny Cylindry

- **Zestawy 10 walców**, w czterech kolorach, których wielkość (wysokość i grubość) systematycznie się zwiększa. Walce służą do doskonalenia zmysłów przez porównywanie, porządkowanie, budowanie. W toku pracy nauczyciel dba, by dziecko dokładnie wykonywało zadanie. Działaniom towarzyszy skupienie i wysiłek umysłowy.



▪ Fot. 19. Materiał sensoryczny Cylindry

Świat figur i brył

Do bardzo ciekawych pomocy o dużej wartości edukacyjnej należą np.: gabinet geometryczny, trójkąty konstrukcyjne, bryły geometryczne w koszyku czy tajemnicze woreczki[33].

- **Gabinet geometryczny** – przeznaczony dla dzieci od 3 lat. Celami tego materiału są: poznawanie nazw i kształtów podstawowych figur geometrycznych (koło, kwadrat, trójkąt), nabywanie umiejętności rozpoznawania, nazywania i opisywania kształtu i wyglądu figur. Gabinet składa się z dwu części: tacki demonstracyjnej i szafki geometrycznej[34].
- **Tacka demonstracyjna** to drewniana taca z ramką, którą wyznacza na tacy sześć okienek. Każde okienko to wycięty kwadrat ze sklejki. 3 dolne okienka są w całości, a 3 górne to matryce figur i figury-klocki. Matryce i figury mają kształt: koła, kwadratu, trójkąta. W skład kompletu wchodzi również tacka z kartonami. Każdej figurze odpowiadają 3 karty: przedstawiające całą figurę, gruby obwód, cienki obwód. Zasady pracy z tym materiałem związane są z tym, że figurę i matrycę należy obwodzić zawsze prawą ręką (przy praworęczności) i dwoma palcami (wskazującym i środkowym), a figurę trzymać lewą ręką (wszystkimi palcami), matrycę należy obwodzić dwoma palcami, a przy obwodzeniu podkreślać koniec krawędzi.




▪ Fot. 20, 21. Gabinet geometryczny

33 M. Centner-Guz, Nieopublikowane materiały dydaktyczne w formie opisu pomocy M. Montessori przygotowane w ramach Podyplomowych Studiów w zakresie Pedagogiki Marii Montessori, prowadzonych przez Zakład Pedagogiki Przedszkolnej UMCS w Lublinie, 2006.

34 B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji dzieci...*, s. 285.

Sposoby pracy z materiałem:

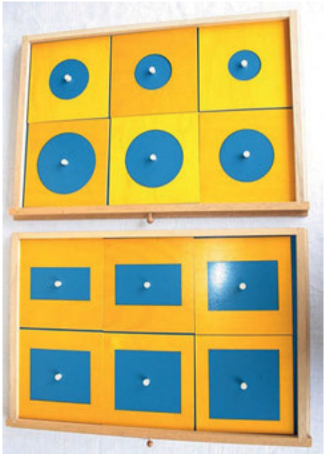
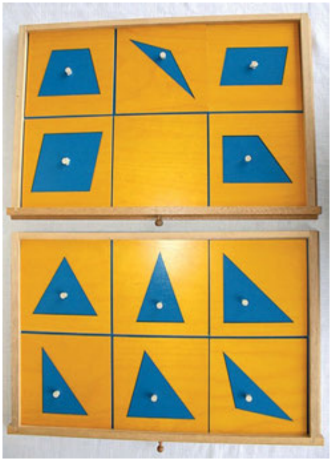
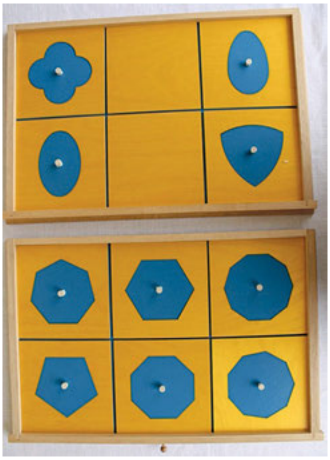
- obwodzenie figury i obwodzenie matrycy (najpierw nauczyciel, potem dziecko);
- nauczyciel przekłada figury w dolnych okienkach, dziecko umieszcza je we właściwych miejscach;
- nauczyciel rozmieszcza figury w dolnych okienkach, ale nie pod właściwymi matrycami;
- rozkładanie kart pod tacą, przyporządkowywanie kart na tacy;
- wędrówka figury po kartach;
- lekcja nazw: obwodzenie figury i matrycy przez nauczyciela z podaniem nazwy, dziecko powtarza czynność; stawianie pytań o figury: *Pokaż mi trójkąt, koło* (nauczyciel posługuje się nazwą), *Co to jest?* (dziecko posługuje się nazwą);
- wykonywanie własnego kompletu figur – odrysowywanie, zamalowywanie, wycinanie.

• **Szafka geometryczna (Komoda geometryczna)** to 6 szuflad w komodzie, każda szuflada posiada 6 pól (jak taca demonstracyjna) z figurami:

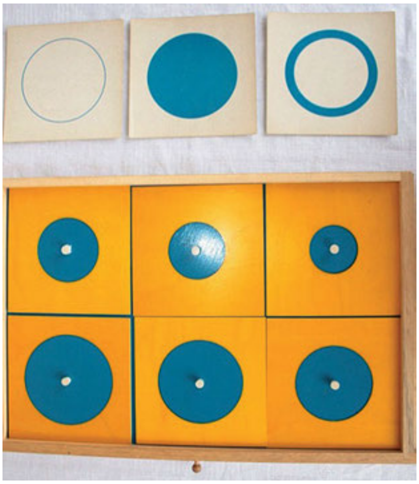
I szuflada – zawiera 6 kół o malejących średnicach o 1 cm (maks. średnica 10 cm, min. 5 cm);

II szuflada – zawiera prostokąty od 10 cm × 10 cm do 10 cm × 5 cm;

III szuflada – zawiera 6 trójkątów (równoboczny, równoramienny, ostrokątny, prostokątny równoramienny, prostokątny różnoramienny, rozwartokątny równoramienny, rozwartokątny różnoramienny);

▪ Fot. 22, 23, 24. Komoda geometryczna, szuflady I–VI





▪ Fot. 25, 26. Matryce, figury i karty

IV szuflada – zawiera 4 czworokąty (romb, równoległobok, trapez równoramienny, trapez różnoramienny), w tej szufladzie znajduje się też trójkąt, który nie mieści się w III szufladzie;
V szuflada – zawiera wielokąty: 5-, 6-, 7-, 8-, 9-, 10-kat.;
VI szuflada – zawiera figury „zaokrąglone": elipsa, owal, tarczowa, kwiatowa.

Do kompletu należy szafka z półkami, na każdej półce znajdują się karty do poszczególnych szuflad (jak przy tacy demonstracyjnej).

Sposób prezentacji i cele: jak przy tacy demonstracyjnej.

Z każdą (figurą) szufladą należy pracować oddzielnie i nie pomijać żadnej z nich, zawsze należy poprowadzić lekcję nazw (koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt, czworokąt), należy podpisywać figury (z wykorzystaniem flamastra i kartek).

Sposoby pracy z materiałem:

– układanie figur w rzędzie (od naj... do naj....), układanie kart;
– mieszanie figur z różnych szuflad i karty, dziecko powinno materiał uporządkować;
– układanie różnych wzorów z figur (np. bałwany, studnia z matryc kół, okno i schody; z prostokątów, składanie wszystkich prostokątów w jeden duży);
– tworzenie wzorów ludowych;
– odrysowywanie figur;
– przyporządkowywanie kart do figur, chodzenie figurami po kartach;
– wykonywanie własnego kompletu;
– lekcje nazw;
– wyszukiwanie w otoczeniu podobnych przedmiotów (płaskich);
– prace plastyczne na bazie danej figury.

- **Trójkąty konstrukcyjne** – jest to materiał przeznaczony dla dzieci od 3. r. ż. Tworzy go pięć drewnianych pudełek: trójkątne, duże sześciokątne, małe sześciokątne i dwa prostokątne, w których znajdują się trójkątne płytki.



▪ Fot. 27. Trójkąty konstrukcyjne

Pudełko I to trójkątne pudełko zawierające: szary równoboczny trójkąt bez czarnych linii, dwa trójkąty prostokątne w kolorze zielonym, zawierające czarne linie przy dłuższych przyprostokątnych, trzy żółte trójkąty rozwartokątne równoramienne (równe ramiona zaznaczone są czarnymi krawędziami), cztery trójkąty równoboczne w kolorze czerwonym (jeden bok każdego trójkąta zaznaczony jest czarną linią); wszystkie trójkąty z czarnymi krawędziami złożone w obrębie danego koloru w miejscach czarnych linii tworzą trójkąt równy szaremu. Pomoc ta umożliwia poznanie różnych kształtów trójkątów, porównanie ich; ćwiczenia w rozróżnianiu form geometrycznych. Powala dostrzec różnorodność barw i form. Podczas pracy z tym materiałem należy pamiętać o oburęcznym przenoszeniu pudełka, o kolejności wkładania według porządku: szary, zielony, żółty, czerwony, o pracy na dywaniku.

Sposoby pracy z materiałem:

– Nauczyciel zaczyna od trójkąta szarego. Nic nie mówiąc, wyciąga go, gładzi jego powierzchnię, obwodzi palcami kontury, podaje dziecku. Dziecko postępuje podobnie. W ten sposób postępujemy z następnymi trójkątami.
– Zabawa, manipulowanie trójkątami: układanie wzorów, szlaczków w celu samodzielnego doświadczania materiału.

- Nauczyciel poleca dziecku: *Posegreguj trójkąty. Jak możesz to zrobić?*
- Nauczyciel bierze dwa zielone trójkąty, dotyka czarnych linii i składa je. Następnie bierze szary trójkąt, który kładzie na zielony, i pokazuje dziecku, że są identyczne (bez słów).
- Nauczyciel pyta: *Czy możesz ułożyć jeszcze jeden taki?* Kiedy dziecko ułoży, prosi, by zrobiło jeszcze jeden. Nauczyciel powinien skłonić dziecko, aby porównało z szarym trójkątem.
- Nauczyciel podaje dziecku sznurek i prosi, by obwodziło powstałe trójkąty (dziecko powinno doświadczyć, że zawsze potrzeba tyle samo sznurka, że obwody są równe).
- Wyszukiwanie podobnych figur w otoczeniu.
- Budowanie innych figur.
- Odrysowywanie, kolorowanie, wycinanie własnego kompletu.

Pudełko II to drewniane pudełko sześciokątne, które zawiera: 1 duży żółty trójkąt obwiedziony czarnymi liniami, 3 żółte trójkąty równoramienne (czarne linie na dwóch równych ramionach), 2 trójkąty równoramienne w szarym kolorze – czarna linia na jednym z równych ramion, 2 czerwone trójkąty równoramienne – czarna linia u podstawy. Małe trójkąty są (żółte, szare i czerwone) rozwartokątne, równoramienne, duży trójkąt jest równoboczny.

Cele, które można zrealizować podczas pracy z materiałem, to: ukazanie dziecku figur, jakie zawierają się w sześciokącie, nabywanie umiejętności budowania różnorodnych trójkątów i figur z trójkątów, doskonalenie umiejętności rozróżniania i nazywania figur, rozwijanie aktywności twórczej (układanie wzorów i kompozycji).

Sposoby pracy z materiałem:

- doświadczanie materiału przez dotykanie i obwodzenie figur;
- budowanie figur przez składanie według czarnych linii;
- układanie trójkątów na bazie trójkąta podstawowego;
- układanie różnych figur;
- łączenie trójkątów z trójkątami z innych pudełek.

Pudełko III to małe drewniane pudełko sześciokątne zawierające: duży równoboczny żółty trójkąt bez czarnych linii, 6 szarych równobocznych trójkątów z czarnymi liniami na dwu bokach, 3 zielone trójkąty równoboczne, jeden z nich ma 2 ramiona zaznaczone czarnymi liniami, pozostałe 2 oznaczone są czarną linią na jednym boku, 2 trójkąty równoboczne w czerwonym kolorze – czarna linia przy jednym boku, 6 czerwonych trójkątów rozwartokątnych, równoramiennych, posiadających czarną linię u podstawy.

Sposoby pracy z materiałem:
- doświadczanie materiału;
- segregowanie (układanie wg koloru, wielkości);
- próba układania trójkątów na bazie trójkąta podstawowego;
- układanie figur zgodnie z czarnymi liniami;
- układanie sześciokątów;
- układanie innych figur foremnych i nieforemnych;
- układanie wzorów – łączenie z figurami z innych pudełek;
- wykonanie własnego kompletu figur.

Pudełko IV – drewniane prostokątne pudełko z kolorowymi trójkątami, zawierające: 2 zielone trójkąty równoramienne – czarna linia przy najdłuższym boku, 2 zielone trójkąty prostokątne różnoramienne – czarna linia przy dłuższej przyprostokątnej, 2 żółte trójkąty prostokątne równoramienne – czarna linia przy jednej z przyprostokątnych, 2 żółte trójkąty różnoramienne – czarna linia przy krótszej przyprostokątnej, 2 żółte trójkąty równoboczne – czarna linia przy jednym z boków, 2 szare trójkąty prostokątne równoboczne – czarna linia przy przeciwprostokątnych, 1 czerwony trójkąt prostokątny równoboczny – czarna linia przy dłuższej przyprostokątnej, 1 trójkąt czerwony rozwartokątny równoboczny – czarna linia przy najdłuższym boku.

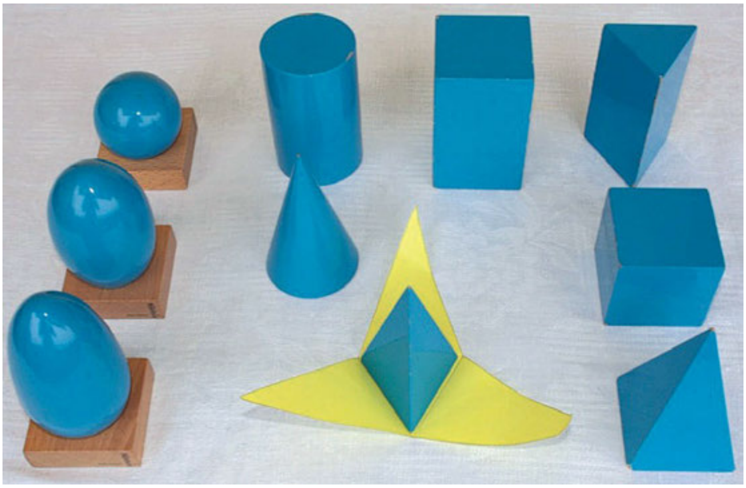
Sposoby pracy z materiałem:
- doświadczanie materiału;
- budowanie wg linii;
- przekształcanie czworokątów w prostokąty (jak sugeruje kształt pudełka);
- próby budowania prostokątów.

Pudełko V drewniane prostokątne pudełko z niebieskimi trójkątami bez czarnych linii, zawierające następujące trójkąty: 2 trójkąty prostokątne równoramienne, 2 trójkąty prostokątne różnoramienne, 1 trójkąt prostokątny różnoramienny, 1 trójkąt rozwartokątny różnoramienny, 2 trójkąty równoboczne.

Sposoby pracy z materiałem:
- segregowanie trójkątów (wybieranie jednakowych);
- budowanie z jednakowych trójkątów figur i próba zbudowania figury z różnych trójkątów;
- budowanie figur foremnych i nieforemnych.

We wszystkich ćwiczeniach celem jest różnicowanie, rozróżnianie, nazywanie, dostrzeganie figur geometrycznych (pojedynczych i powstałych z łączenia). Dzieci powinny dostrzec i zrozumieć, że podstawą wszystkich figur jest trójkąt. Dziecko kontroluje swoją pracę, posługując się zmysłem dotyku i wzroku, ponadto pomaga mu w tym nauczyciel.

- **Bryły geometryczne w koszyku** – materiał przeznaczony dla dzieci od 3 do 6 lat. W koszyku znajduje się 10 brył geometrycznych: sześcian, prostopadłościan, graniastosłup, 2 ostrosłupy (jeden o podstawie trójkąta, drugi o podstawie kwadratu), stożek, walec, kula, dwie elipsoidy. Bryły są w kolorze niebieskim. Do kompletu należą także figury płaskie odpowiadające podstawom i ścianom brył.



▪ Fot. 28. Bryły geometryczne

Cele pracy z materiałem to rozwijanie zdolności wielozmysłowego badania i rozróżniania obiektów, rozwijanie wzrokowej percepcji form geometrycznych, uświadomienie różnic pomiędzy formami geometrycznymi, rozpoznawanie i nazywanie figur płaskich i przestrzennych, bogacenie słownictwa o nazwy brył i figur geometrycznych.

Zaleca się, by bryły przenosić w koszyku, pracować z nimi na dywaniku, a bryły okrągłe umieszczać na podstawkach. Lekcje nazw powinny dotyczyć pojęć: podstawa, ściana, krawędź, wierzchołek, oraz nazw brył.

Sposoby pracy z materiałem:
- doświadczanie brył dotykiem, próby toczenia, turlania;
- budowanie kompozycji;
- segregowanie wg różnych kryteriów (dziecko segreguje tak długo, aż dostrzeże zależności między bryłami, np. wg podstawy);
- dopasowywanie figur płaskich do brył;
- przypomnienie nazw figur płaskich;
- ustawianie brył na podstawkach, przykładanie figur płaskich do boków brył;
- przygotowanie siatek brył z kolorowego papieru;

- dopasowywanie brył do siatek;
- dotykanie brył pod przykryciem – opisywanie ich;
- rozpoznawanie brył po dotyku.

- **Tajemnicze woreczki** – są to dwa bliźniacze woreczki z materiału, różniące się kolorem oznaczeń, woreczki mają otwory z boku, co umożliwia wkładanie rąk. Typowy woreczek zawiera następujące bryły: walec, kulę, jajo, 3 różne prostopadłościany, 3 graniastosłupy. Z materiałem mogą pracować dzieci w wieku od 3 do 6 lat.



▪ Fot. 29. Tajemnicze woreczki

Materiał służy rozwijaniu zmysłu stereognostycznego, utrwalaniu znajomości brył, rozwijaniu umiejętności spostrzegania brył, nabywaniu świadomości, że przedmioty istnieją, choć ich nie widać. Osoby korzystające z materiału zakładają woreczki na szyję, wkładają w otwory dłonie i badają bryły obiema dłońmi[35].

Sposób pracy z materiałem:

- Jedna osoba opisuje wybrany przez siebie element, druga osoba bada elementy i wybiera opisywany przez kolegę przedmiot. W zabawie może brać udział nauczyciel i dziecko lub dwoje dzieci. Zawsze po skończonej pracy materiał należy uporządkować według ścisłych prawideł.

Materiały opracowane przez M. Montessori to bardzo ciekawe i użyteczne pomoce dydaktyczne. Tworzą one bogatą intuicyjną bazę dla rozumienia abstrakcyjnych obiektów geometrycznych.

[35] B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji dzieci...*, s. 285–286.

* * *

Koncepcje pedagogiczna F. Fröbla i M. Montessori mogą być współcześnie bardzo przydatne w organizowaniu i prowadzeniu edukacji geometrycznej dla najmłodszych dzieci. Opisane idee pedagogiczne są nadal aktualne, a zasady i normy postępowania metodycznego mogą wyznaczać zarówno pracę nauczyciela wczesnej edukacji, jak i rodzica. Z opisanych tradycji warto przenieść do współczesności następujące reguły:

- Podstawą kształtowania się pojęć matematycznych są dobrze rozwinięte zmysły, dlatego, szczególnie na etapie początkowym, dziecko powinno rozwijać wrażliwość zmysłową przez doskonalenie wzroku, słuchu, dotyku, węchu i smaku.
- Aktywność jest głównym motorem rozwoju dziecka. Dziecko aktywne poznawczo rozwija się szybciej i na wielu płaszczyznach. Przez badanie, manipulowanie ma okazję do dokonywania porównań, przekształcania, manipulowania, określania właściwości przedmiotów i zjawisk, poznaje w ten sposób i uczy się rozróżniać barwy, dźwięki, kształty, wielkości, ciężar.

W obydwu koncepcjach zwraca się uwagę na zasoby środowiska przyrodniczego i doskonalenie zmysłów przez kontakt dziecka z materiałem przyrodniczym. Podejmując zabawy manipulacyjne, konstrukcyjne czy badawcze z użyciem np. piasku, szyszek, nasion, wody, gliny, muszelek czy kamieni, dziecko ma okazję do naturalnego poznawania zróżnicowanej faktury, temperatury, ciężaru itp. Dorosły może wykorzystać ten materiał także do zabaw czy gier dydaktycznych.

F. Fröbel i M. Montessori podkreślają, że zabawki, materiały, pomoce i środki dydaktyczne powinny być przygotowane z dużą dbałością, znawstwem i szacunkiem dla dziecka. Powinny być estetyczne, proste, funkcjonalne, naturalne i ograniczać się tylko do jednej trudności. Każdy materiał ma spełniać określone cele, a sposób wykorzystania go powinien opierać się na ścisłej procedurze postępowania dydaktycznego. Jest to celowe i świadome postępowanie, mające na celu eliminowanie chaosu w życiu dziecka w myśl zasady, że gdy otoczenie jest uporządkowane, przekłada się to na wewnętrzną harmonię dziecka.

W świetle tradycji pedagogicznej F. Fröbla i M. Montessori nauczyciel nie powinien ograniczać treści lekcji do zagadnień wyznaczonych tylko przez podstawę programową, bo niektórych zagadnień tam nawet nie znajdzie. Obserwuje się często w praktyce, że nauczyciele ograniczają swoje działania wyłącznie do figur płaskich, a unikają pewnych, może w ich przekonaniu trudniejszych zagadnień, jak choćby zabaw z sześcianami, prostopadłościanami, walcami. Pomoce stworzone przez F. Fröbla i M. Montessori oraz proponowane przez nich postępowanie metodyczne są przykładem tego, że małe, kilkuletnie dzieci mogą mieć kształcący kontakt z materiałem, będącym nośnikiem bardziej złożonych

pojęć i kształtów nie tylko znanych im z życia codziennego, jak kula, sześcian, czy walec, ale także graniastosłup, elipsoida, różnego rodzaju trójkąty czy wielokąty. Zdaniem M. Montessori w toku edukacji geometrycznej nie należy unikać właściwego nazewnictwa. Stanowi to zachętę do zmiany przekonania niektórych dorosłych i odwagi w używaniu właściwych określeń i nazw podczas budowania w umysłach dzieci wiedzy geometrycznej.

Warte podkreślenia jest także to, że poza aktywnością swobodną i zabawami konstrukcyjnymi edukacja geometryczna w świetle pedagogiki F. Fröbla i M. Montessori powinna być realizowana na zorganizowanych jednostkach metodycznych: czy to zajęciach w przedszkolu, czy lekcjach prowadzonych w szkole lub w domu. Taka lekcja, można ją nazwać współcześnie „epizodem wspólnego zaangażowania", powinna być w miarę możliwości indywidualna, krótka, ale należy dołożyć w niej starań, aby „liczyć i ważyć słowa"[36]. Zadania stawiane w jej toku mogą być początkowo oparte na rozpoznawaniu, dobieraniu w pary, wyszukiwaniu kontrastów, a następnie powinny iść w kierunku wykorzystywania dalszych możliwości dziecka i materiału edukacyjnego, wyszukiwania cech figur i związków logicznych, dokonywania przekształceń itp.

2.3. GEOMETRIA W EDUKACJI XX WIEKU

W Europie XX wieku nastąpiły gwałtowne przemiany społeczno-kulturowe i związany z nimi rozwój szkolnictwa. We Francji dotychczasowe ochrony zostały zastąpione szkołami macierzyńskimi (École maternelle), w Brukseli Owidiusz Decroly (1871–1932) założył wzorową szkołę dla dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym, a z inicjatywy Edwarda Claparède'a (1873–1940), szwajcarskiego psychologa, pedagoga i lekarza, powstała w Genewie placówka edukacyjna dla dzieci nazwana Dom Dziecięcy. W wychowaniu w domach dziecięcych podkreślało się, że cechą dzieciństwa jest dążenie dziecka do samodzielności i, podobnie jak w systemie M. Montesorii, istotne jest, by stworzyć dzieciom ku temu odpowiednie warunki materialne i organizacyjne.

Jak wynika z powyższego, wraz z początkiem nowego wieku nastąpił intensywny zwrot w kierunku opieki, wychowania i edukacji małego dziecka. Wzrosła rola edukacji i ranga dzieciństwa, najmłodszym ułatwiono dostęp do wiedzy i dostrzeżono znaczącą rolę wczesnego wspomagania rozwoju dziecka. Wychowanie i edukacja w instytucjach przedszkolnych oraz szkolnych stały się dobrem publicznym. W niniejszym podrozdziale zarysowuję rozwój edukacji małego dziecka w Polsce i tym samym ewolucję programów kształcenia i wychowania, które

[36] *Ibid.*, s. 67.

analizuję przez pryzmat edukacji geometrycznej. Dla zachowania przejrzystości analizę treści programowych podzieliłam ze względu na etapy edukacyjne, zgodne z rozwojem dziecka, w związku z tym jeden z podrozdziałów dotyczy analizy treści geometrycznych wychowania przedszkolnego, a drugi poziomu nauczania początkowego.

2.3.1. TREŚCI GEOMETRYCZNE W PROGRAMACH WYCHOWANIA PRZEDSZKOLNEGO

Przez 146 lat, od roku 1772 do roku 1918, Polska nie istniała na mapie Europy. Kraj, podzielony na części, znajdował się pod zaborem rosyjskim, pruskim i austriackim. Warunki dla rozwoju edukacji narodowej były bardzo utrudnione. Dzięki głębokiemu patriotyzmowi Polaków, ich uporczywości, wierze i niezłomności język i kultura polska poniosły straty, ale nie zaginęły. Naukę o wychowaniu rozwijało wielu wybitnych działaczy społecznych, filozofów i pedagogów. Idee fröblowskie, wpływy M. Montessorii, O. Decroly'ego czy C. Freineta zaznaczyły się w naszym kraju bardzo wyraźnie. Dlatego w tym podrozdziale wymieniam najważniejszych polskich działaczy społecznych i pedagogów małego dziecka na czele z najważniejszą polską „freblanką" Marią Weryho-Radziwiłłowicz, a następnie analizuję treści geometryczne w programach wychowania przedszkolnego.

Jedną ze znaczących osób, które wywarły istotny wpływ na koncepcję edukacji w Polsce XIX wieku, był Bronisław F. Trentowski (ur. 1808, zm. 1869), który opublikował w 1842 roku pierwszy polski podręcznik *Chowanna, czyli system pedagogiki narodowej jako umiejętności wychowania, nauki i oświaty, słowem wykształcenia naszej młodzieży.* B. Trentowski za kluczową zasadę pedagogiki przedszkolnej przyjmował rozwijanie aktywności dziecka, za zadanie wychowawcy uznawał szanowanie jego samodzielności i stwarzanie okazji do organizowania sytuacji sprzyjających jej ujawnianiu[37].

Propagatorem idei tworzenia ochronek był bł. Edmund Bojanowski (1814–1871), który traktował te instytucje jako jedno z ogniw pracy pedagogiczno-religijnej wśród ludu. E. Bojanowski otrzymał staranne wychowanie w katolickiej rodzinie. Na skutek jego zabiegów powstało Zgromadzenie Zakonne Sióstr Służebniczek dla dziewcząt wiejskich i zaczęły powstawać ochronki w Wielkim Księstwie Poznańskim, Galicji, na Śląsku i w Królestwie Polskim.

Inną ważną postacią był August Cieszkowski (1914–1994), polski ziemianin, działacz społeczny i polityczny, jeden z założycieli Ligi Narodowej, współtwórca i prezes Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, propagator zakładania

37 W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. I, s. 184.

ochronek wiejskich. W 1922 roku A. Cieszkowski wydał rozprawę *O ochronach wiejskich*, która przyczyniła się do powstania w Warszawie w 1858 roku Wydziału Ochron Wiejskich.

Jedną z najbardziej zasłużonych dla pedagogiki przedszkolnej kobiet była Maria Weryho-Radziwiłłowiczowa (1858–1944), pedagog publicystka, działaczka społeczna, osoba o gruntownym wykształceniu, po studiach przyrodniczych na Wyższych Kursach dla Kobiet im. Bestużewa–Riumina, kursach wychowania fizycznego i 2-letnim kursie fröblowskim, prowadzonym przez Justynę Strzemeską. W 1885 roku w Warszawie M. Weryho rozpoczęła pracę jako nauczycielka na konspiracyjnych kursach pedagogicznych, zorganizowanych przy pensji Henryki Czarnockiej. Dwa lata później założyła własny zakład fröblowski, w 1896 roku zakładów takich było już 16. Kształciła wychowawczynie ochronek w toku kursów pedagogicznych, co przyczyniło się do powstania w 1918 roku Państwowego Seminarium. Po odzyskaniu przez Polskę niepodległości M. Weryho objęła stanowisko naczelnika Referatu Przedszkolnego w Ministerstwie Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego i wydawała pierwsze pismo – „Przegląd Pedagogiczny", w którym prowadziła dział *Ogródek dziecięcy*. W 1895 roku wraz z J. Strzemeską opublikowała pierwszą metodykę pracy z małym dzieckiem *Wychowanie przedszkolne*. *Podręcznik dla wychowawców.* Dzięki jej inicjatywie powstało Tajne Koło Wychowania Przedszkolnego. Za sprawą M. Weryho w 1907 roku zalegalizowano Towarzystwo Wychowania Przedszkolnego. W Królestwie Polskim uruchomiono kursy i trzy szkoły dla wychowawczyń przedszkoli, a w 1915 roku przy Wydziale Oświecenia Komitetu Obywatelskiego m. Warszawy powstała Komisja Wychowania Przedszkolnego. W 1925 roku Towarzystwo rozpoczęło wydawanie czasopisma „Wychowanie Przedszkolne", w którego redakcji M. Weryho pracowała do wybuchu II wojny światowej.

Publikacje M. Weryho zapoczątkowały rozwój metodyki wychowania przedszkolnego i stanowiły podstawę tworzonych w latach następnych poradników i programów wychowania przedszkolnego. Tak oto w 1933 roku ukazał się *Poradnik w sprawach nauczania i wychowania oraz administracji* w *szkołach ogólnokształcących,* który zawierał część: *Rady dla wychowawczyń w przedszkolach.* Poradnik ten obowiązywał do roku 1950, kiedy wydano *Program wychowania w przedszkolu*. Następne programy wychowania przedszkolnego pojawiły się w udoskonalonej formie i treści, kolejno w latach 60., 70. i 80. XX wieku.

Do analizy pod względem treści geometrycznych wybrałam programy z lat 70. i 80. XX wieku oraz podstawy programowe.

Tab. 1. Treści geometryczne w programie wychowania przedszkolnego z roku 1973

<table>
<tr><th>Wiek dzieci</th><th>Kształcenie zmysłów, badanie i porównywanie obiektów</th><th>Planimetria i stereometria</th><th>Geometria w sztuce zdobniczej, przyrodzie, architekturze i zabawie</th></tr>
<tr><td>Dzieci 3-letnie</td><td>– próby klasyfikowania przedmiotów wg cech jakościowych, gromadzenie przedmiotów mających wybraną wspólną cechę (wielkość, kształt, kolor, przeznaczenie);
– porównywanie w zabawie różnorodnych materiałów gromadzonych w skrzynce skarbów</td><td>– manipulowanie figurami geometrycznymi płaskimi, bez konieczności nazywania ich;
– dowolne wyrażanie spostrzeżeń w formach płaskich;
– rozpoznawanie figur geometrycznych przestrzennych: kula, sześcian</td><td rowspan="4">– manipulowanie figurami geometrycznymi przestrzennymi bez konieczności nazywania ich;
– dowolne wyrażanie spostrzeżeń w formach półprzestrzennych i przestrzennych;
– układanie z elementów geometrycznych i z tworzywa przyrodniczego, budowanie z klocków, łączenie kilku elementów w całość</td></tr>
<tr><td>Dzieci 4-letnie</td><td></td><td>– rozpoznawanie figur geometrycznych płaskich: koło, kwadrat</td></tr>
<tr><td>Dzieci 5-letnie</td><td></td><td>– używanie nazw: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt</td></tr>
<tr><td>Dzieci 6-letnie</td><td></td><td>– operowanie nazwami przestrzennych figur geometrycznych: kula, sześcian</td></tr>
</table>

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu[38].

Program wychowania w przedszkolu wprowadzony Zarządzeniem Ministra Oświaty i Wychowania z dnia 11 maja 1973 obowiązywał od 1 września 1973[39]. W programie podkreślono poznawanie kształtów przez manipulowanie oraz porównywanie ich w toku działań plastyczno-konstrukcyjnych. W zakresie planimetrii założono, że dzieci młodsze poznają koło i kwadrat, bez konieczności nazywania ich, a dzieci starsze trójkąt, prostokąt wraz z używaniem ich nazw. W zakresie stereometrii pojawiły się zagadnienia związane z rozpoznawaniem wraz z używaniem nazw takich pojęć, jak kula i sześcian. Dwa lata później ukazał się program dla sześciolatków.

---

38 *Program wychowania w przedszkolu*, Ministerstwo Oświaty i Wychowania, Instytut Programów Szkolnych, WSiP, Warszawa 1981.

39 *Ibidem.*

Tab. 2. Treści geometryczne w Programie wychowania przedszkolnego z roku 1975

Treści geometryczne		
Kształcenie zmysłów, badanie i porównywanie obiektów	Planimetria i stereometria stereometria	Geometria w sztuce zdobniczej, przyrodzie, architekturze
– doskonalenie umiejętności dostrzegania w otoczeniu i porównywania właściwości i cech: wizualnych, dźwiękowych, dotykowych, węchowych, – przyswajanie w trakcie ich działalności twórczej charakterystycznych kształtów przedmiotów (kulisty, kanciasty, wypukły, wklęsły), – faktury (śliski, szorstki, chropowaty) i tekstury (miękki, twardy), – określanie wielkości przedmiotów w toku wykonywania czynności manipulacyjnych (duży, mały, gruby, cienki, długi, krótki, duży, większy, największy, mały, mniejszy, najmniejszy, taki sam; gruby, grubszy, najgrubszy, cienki, cieńszy, najcieńszy, taki sam; długi, dłuższy, najdłuższy, krótki, krótszy, najkrótszy, taki sam; szeroki, szerszy, najszerszy, wąski, węższy, najwęższy, taki sam; wysoki, wyższy, najwyższy, niski, niższy, najniższy, taki sam; – mierzenie za pomocą dowolnie obranej jednostki miary – długości, szerokości i wysokości wybranych przedmiotów	– przyswajanie rodzaju linii (cienka, gruba, prosta, krzywa); – zapoznanie z podstawowymi figurami geometrycznymi płaskimi (koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt) i układanie z nich kompozycji (przestrzennych i płaskich), rozpoznawanie w otoczeniu i nazywanie; – zapoznanie z podstawowymi bryłami przestrzennymi (kula, sześcian) i układanie z nich kompozycji (przestrzennych i płaskich), rozpoznawanie w otoczeniu i nazywanie	– stwarzanie okazji do postrzegania i odczuwania rytmu, symetrii i ruchu (np. szereg drzew, rytm okien i balkonów w budownictwie mieszkaniowym, falowanie zbóż, rytmiczne ruchy człowieka pracującego); – próby wyrażania ruchu, rytmu i symetrii; – udostępnianie dzieciom na terenie sali przedszkolnej reprodukcji dzieł malarstwa polskiego (łącznie ze sztuką współczesną), plakatów oraz wytworów sztuki ludowej (przedmiotów używkowych, haftów, wycinanek, strojów) jako źródła przeżyć, poznania i inspiracji

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu[40].

W Programie wychowania przedszkolnego[41] dla dzieci sześcioletnich w klasie przedszkolnej z 1975 roku wystąpiły rozbudowane treści dotyczące poznawania własności przedmiotów drogą sensoryczno-motoryczną. Zadaniem dzieci w tamtych latach było poznawanie cech obiektów, kształtowanie pojęć matematycznych w działaniu przez porównywanie, porządkowanie i nazywanie. Dokładnie określono cechy jakościowe poznawanych przedmiotów, pojawiło się (nieistniejące

40 *Program pracy wychowawczo-dydaktycznej w klasie przedszkolnej,* Ministerstwo Oświaty i Wychowania, Instytut Programów Szkolnych, WSiP, Warszawa 1975.

41 *Ibidem.*

we współczesnych programach wychowania przedszkolnego) pojęcie linii, poznawanie i odczuwanie rytmu i symetrii w naturze, malarstwie i sztuce ludowej.

Kolejny program to program z 1984 roku.

Tab. 3. Treści geometryczne w Programie wychowania przedszkolnego z roku 1984

Wiek dzieci	Kształcenie zmysłów, badanie i porównywanie obiektów	Planimetria stereometria	Geometria w sztuce zdobniczej, przyrodzie, architekturze i zabawie
Dzieci 3-letnie	1) poznawanie stosunków jakościowych i ilościowych 2) nabywanie umiejętności posługiwania się słowami określającymi położenie przedmiotów w przestrzeni: – położenie przedmiotów w przestrzeni (na, pod, za, obok, wysoko, nisko) – kierunek (w przód, w tył, do góry, na dół) – wielkość przedmiotów (duży, mały, gruby, cienki, długi, krótki) 3) próby klasyfikowania przedmiotów wg cech jakościowych, gromadzenie przedmiotów mających wybraną wspólną cechę (wielkość, kształt, kolor, przeznaczenie)	– manipulowanie figurami geometrycznymi płaskimi (klocki, mozaika), bez konieczności nazywania ich	– poznawanie elementarnych wartości wizualnych, dźwiękowych, dotykowych, słuchowych i węchowych występujących w otoczeniu, takich jak: kolor, kształt, wielkość, właściwości powierzchni – obcowanie z wytworami sztuki, artystyczną ilustracją i z własnymi pracami plastycznymi – porównywanie w zabawie różnorodnych materiałów gromadzonych w skrzynce skarbów
Dzieci 4-letnie	1) różnicowanie, porównywanie i nazywanie: – położenia przedmiotów w przestrzeni (między, wyżej, niżej, daleko, blisko, dalej, bliżej) – kierunku (przed siebie, za siebie, w bok) – wielkości przedmiotów (duży, większy, mały, mniejszy, gruby, grubszy, cienki, cieńszy, taki sam, szerokości: wąski, węższy, szeroki, szerszy, taki sam, wysokości: niski, niższy, wysoki, wyższy, taki sam; jakościowych)	– rozpoznawanie figur geometrycznych płaskich: koło, kwadrat – rozpoznawanie figur geometrycznych przestrzennych: kula, sześcian	– obcowanie z wytworami o walorach artystycznych, np. reprodukcjami, fotografiką, sztuką ludową

Tab. 3, cd.

Dzieci 5, 6-letnie	– układanie kompozycji z figur geometrycznych, używanie nazw: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt	– układanie kompozycji z figur geometrycznych, używanie nazw: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt – rozpoznawanie figur geometrycznych przestrzennych: kula, sześcian	– ocenianie wnętrz przedszkolnych, interesowanie się przedmiotami dekoracyjnymi – oglądanie dzieł plastyki w najbliższym otoczeniu (np. rzeźb, budowli, plakatów) – układanie z elementów geometrycznych i różnorodnych materiałów, komponowanie scen i ornamentów płaskich, tworzenie kompozycji dekoracyjnych z kwiatów, zasuszonych liści, gałęzi – poszerzanie doświadczeń plastyczno-konstrukcyjnych poprzez: – układanie z różnorodnych elementów, projektowanie ornamentów (np. pasowych, w kole, w kwadracie), wykonywanie wycinanek płaskich i przestrzennych (rurka, stożek)

Źródło: opracowania własne na podstawie programu[42].

Praca wychowawczo-dydaktyczna według programu opublikowanego w 1984 roku koncentrowała się wokół wyróżnionych dziedzin wychowania: zdrowotnego, społeczno-moralnego, umysłowego, estetycznego i technicznego. W programie tym położono nacisk na rozwój artystyczny dziecka, obcowanie z różnorodnymi jakościowo i stylowo wytworami sztuki, znalazło się miejsce na szukanie i tworzenie kształtów, dekoracji i ornamentów, projektowanie z figur płaskich i tworzenie brył. Podobnie jak w poprzednim programie dla nauczyciela przygotowano wykaz cech jakościowych, które dziecko powinno dostrzegać w toku porównywania w trakcie działań percepcyjno-manipulacyjnych. Treści te były bardzo bogate i zgodne z teorią kształtowania pojęć matematycznych M. Hejný'ego.

* * *

We wszystkich programach uwzględniono gromadzenie spostrzeżeń, budowanie doświadczeń i przeżyć przez działalność plastyczno-konstrukcyjną w kontakcie z formami płaskimi i przestrzennymi, w toku zabaw piaskiem, gliną, materiałem

[42] *Program wychowania w przedszkolu*, Ministerstwo Oświaty i Wychowania, Instytut Programów szkolnych, WSiP, Warszawa 1984.

przyrodniczym, klockami itp. Podkreślano kształcenie zmysłów, badanie i porównywanie obiektów, których formy są atrybutami realnych obiektów. Było to zgodne z teorią M. Hejný'ego. Treści programowe były bogate, a nauczyciel miał z czego wybierać. Najwięcej treści związanych z twórczością geometryczną znalazło się w rozbudowanej wersji programów z lat 1973 i 1977, w programie z 1984 roku. Można uogólnić, że obowiązkowe wówczas programy, mimo że jednolite dla wszystkich klas, były pod względem doboru treści geometrycznych bogate i stymulujące rozwojowo, akcentowały rozwijanie zdolności przestrzennych. Taka unifikacja programowa miała wady i zalety. Jak zauważa M. Karwowska-Struczyk, „przez pół wieku jeden, obligatoryjny program, zatwierdzany przez centralne władze oświatowe, wyznaczał obszar działań nauczyciela w przedszkolu"[43] i dopiero w okresie transformacji ustrojowej i w czasie reformy edukacji nastąpiły istotne zmiany organizacyjne i programowe w zakresie wychowania przedszkolnego. Zarząd nad placówkami przedszkolnymi zaczęły sprawować jednostki samorządu terytorialnego, część przedszkoli została wówczas zlikwidowana z powodu problemów finansowych organów prowadzących, ale zaczęły też powstawać placówki niepubliczne. Wynikające z mocy ustawy z 7 września 1991 roku uregulowania prawne umożliwiły nauczycielom bardziej twórczą pracę, zachęcały do poszukiwania nowych rozwiązań organizacyjnych i programowo-metodycznych, zwiększona została autonomia nauczycieli w zakresie wyboru programu, form pracy, stosowanych metod. W latach 90. XX wieku zaczęły powstawać placówki prowadzone metodą M. Montessori, R. Steinera, O. Decroly'ego, powołanych zostało wiele niepublicznych przedszkoli o różnym profilu edukacyjnym. Obowiązująca dla nich stała się podstawa programowa, a wybór programu i systemu edukacyjnego miał charakter fakultatywny.

Pierwsze *Minimum programowe* wychowania przedszkolnego zostało opublikowane Zarządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z 11 kwietnia 1992 roku. Precyzowało ono cele, zadania i treści wychowania przedszkolnego dla dzieci w wieku od 3 do 6 lat, uznając za nadrzędną wartość edukacji rozwój dziecka. Treści programowe zostały podzielone w *Minimum* na cztery zakresy o dużym stopniu ogólności: Zdrowie – aktywność ruchowa – rozwój fizyczny; Dziecko – rodzina – środowisko; Aktywność intelektualna – rozwój umysłowy; Wrażliwość estetyczna – aktywność twórcza[44].

---

43 M. Karwowska-Struczyk, *Program wychowania przedszkolnego w okresie zmiany ustrojowej* [w:] R. Piwowarski (red.), *Dziecko – nauczyciel – rodzice. Konteksty edukacyjne*, IBE, Białystok 2003, s. 61.

44 K. Kuszak, *Zmiany w edukacji przedszkolnej jako warunek podniesienia jakości życia dzieci* [w:] H. Sowińska (red.), *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej*, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2011, s. 90.

Siedem lat później, 1 grudnia 1999 roku uchwalono *Podstawę programową wychowania przedszkolnego dla przedszkoli i oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych,* która stała się pierwszym wiodącym, podstawowym dokumentem wyznaczającym pracę przedszkoli, oddziałów przedszkolnych przy szkołach podstawowych, placówek edukacyjnych i programów pracy z dzieckiem. W tabeli przedstawionej poniżej zestawiono treści dotyczące geometrii zamieszczone w tych dwu dokumentach.

Tab. 4. Treści geometryczne w podstawach programowych wychowania przedszkolnego w latach 1992–1999

Podstawa programowa	Treści geometryczne		
	kształcenie zmysłów, badanie i porównywanie obiektów	planimetria	geometria w sztuce zdobniczej, architekturze i zabawie
Minimum programowe Zarządzenie Ministra Edukacji Narodowej z 11.04.1992	– kształtowanie umiejętności dostrzegania i porównywania zjawisk wizualnych, dźwiękowych, dotykowych i innych – rozpoznawanie kolorów, kształtów, wielkości – kształcenie orientacji w przestrzeni, wielkości przedmiotów	– zapoznawanie z figurami geometrycznymi	– udział w upiększaniu pomieszczeń wykonanymi przez siebie elementami dekoracyjnymi – poznawanie sztuki regionalnej, lokalnych zabytków kultury
Podstawa programowa wychowania przedszkolnego dla przedszkoli i oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych z 1999 r.	– dostrzeganie i opisywanie różnic, podobieństw i relacji między przedmiotami i zjawiskami – stwarzanie okazji do porządkowania, klasyfikowania i liczenia		wykorzystywanie i tworzenie okazji do poznawania rzeczywistości: – przyrodniczej przez obserwowanie, eksperymentowanie, odkrywanie, – społeczno-kulturowej przez poznawanie zasad organizacji życia społecznego, tradycji rodzinnej, regionalnej, narodowej oraz poznanie dzieł kultury – technicznej przez obserwowanie, manipulowanie oraz przekształcanie przedmiotów lub zmianę ich ułożenia w przestrzeni i czasie

Źródło: opracowania własne na podstawie wyciągów z dokumentów[45].

[45] Zarządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 11 kwietnia 1992 r. w sprawie minimum programowego wychowania przedszkolnego oraz zestawu dopuszczonych do użytku programów wychowania przedszkolnego (Mon. Pol. nr 12, poz. 86). *Podstawa programowa* stanowi załącznik nr 1 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej

Analiza zagadnień zapisanych w podstawach programowych z lat 90. wykazuje, że zarówno w *Minimum programowym*, jak i w *Podstawie programowej* treści geometrycznych było bardzo niewiele, podkreślało się poznawanie kształtów i przestrzeni w toku poznawania przez dziecko otaczającej rzeczywistości. Treści związane z poznawaniem figur geometrycznych bardziej zaakcentowano w *Minimum programowym*, ale zagadnień z zakresu stereometrii (poznawania i badania brył) nie uwzględniono w żadnym z dokumentów. Prawdopodobnie przyjęto założenie, że szczegółowe treści znajdą swoje miejsce w programach nauczania. U schyłku XX wieku Ministerstwo Edukacji Narodowej zatwierdziło do użytku publicznego kilkanaście różnych programów wychowania przedszkolnego, tym samym zaistniała w pracy przedszkoli wielowariantowość rozwiązań metodycznych i organizacyjnych. 23 grudnia 2008 roku nastąpiła kolejna zmiana programowa – opublikowano nową, obowiązującą do chwili obecnej podstawę programową wychowania przedszkolnego (patrz: rozdział 2.4.1).

2.3.2. GEOMETRIA W NAUCZANIU POCZĄTKOWYM W XX WIEKU

W niniejszym rozdziale koncentruję się na treściach geometrycznych w nauczaniu początkowym XX wieku. Rozważając ich obecność i stopień nasycenia programów, warto przybliżyć podłoże historyczne przemian edukacyjnych ówczesnych czasów.

Lata niewoli państwa polskiego przyniosły nauce i narodowemu szkolnictwu tragiczne skutki. Po odzyskaniu przez Polskę niepodległości w 1918 roku znaczny odsetek społeczeństwa cechował analfabetyzm. W rozwiązaniu problemów społecznych miały pomóc uregulowania prawne i organizacyjne – *Dekret o powszechnym obowiązku szkolnym,* wydany w lutym 1919 roku, oraz *Plan rozbudowy sieci szkół i kształcenia kadr pedagogicznych.* Nauczanie dzieci w szkole powszechnej stało się priorytetem narodowym. Proces ten był realizowany na podstawie planów i programu nauczania początkowego. W niniejszym podrozdziale opisuję podstawowe zmiany dotyczące zawartości treści geometrycznych i formułuję ogólne wnioski płynące z analizy dokumentów.

W drugiej połowie XX wieku nastąpiło kilka znaczących zmian programowych odnoszących się do kształcenia na poziomie szkoły podstawowej. W 1945 roku Ministerstwo Oświaty wydało dokument *Plany godzin i materiały programowe na rok szkolny 1945–1946 dla szkół powszechnych i I klas gimnazjum.* Stał się on wiodącym aktem prawnym wyznaczającym pracę szkół. W 1959 roku nastąpiła

z dnia 1 grudnia 1999 r. zmieniającego rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego (Dz.U. nr 2 z 17 stycznia 2000 r. poz. 18).

zmiana i zaczął obowiązywać *Program nauczania dla szkoły podstawowej*, potem program z 1963 roku, a w 1983 roku kolejny zmodyfikowany *Program nauczania początkowego.*

W tabeli przedstawionej poniżej zamieszczam treści geometryczne w programie nauczania początkowego z *Programu ośmioklasowej szkoły podstawowej*[46] opublikowanego w latach 60. XX wieku.

Tab. 5. Treści geometryczne w *Programie ośmioklasowej szkoły podstawowej*[47] z roku 1963

Klasa	Działania psychomotoryczne	Geometria w sztuce zdobniczej, architekturze
Klasa I	– stosunki przestrzenne: przed, między, po, naprzeciw, przy, wewnątrz, zewnątrz itp. – porównywanie przedmiotów przez ich zestawianie i nakładanie, rysowanie – mierzenie i odmierzanie długości miarką centymetrową: centymetr, metr	– wyrażanie rytmu w układzie pasowym, np. chodniki do pokoju lalki, łańcuch na choinkę – formowanie łamanek z papieru
Klasa II	– mierzenie długości i odmierzanie żądanej długości w metrach, decymetrach i centymetrach – konstruowanie prostych pomocy do zabaw (ruchowych, modeli, pomocy naukowych i przyborów)	– układanki z elementów (np. kółek z papieru) wg rytmu – projektowanie, np. wzoru na chusteczkę, serwetkę, dekorację placka, mazurka, tortu – kompozycje w kwadracie lub kole z zaznaczeniem brzegu i środka – kompozycje przestrzenne (np. ozdoby choinkowe z użyciem wydmuszek, czapki z gazet itp.)
Klasa III	– prostokąt, boki równoległe i prostopadłe – kwadrat jako szczególny przypadek prostokąta – kreślenie prostokąta na papierze milimetrowym przy użyciu linijki – obliczanie obwodu tych figur – miary długości: metr, decymetr, centymetr, milimetr, kilometr – mierzenie w szkole i poza nią (kroki, taśma miernicza) – mierzenie i rysowanie siatki prostych pudełek – wykonywanie makiet i modeli	– ćwiczenia w wyrażaniu proporcji – komponowanie układu z kilku przedmiotów o mocno różniących się kształtach (np. wzór na tkaninę, zdobienie papieru) – kompozycje niezamknięte – projekt układu ogródka lub działki – obrazki mozaikowe

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Programu ośmioklasowej szkoły podstawowej*[48] z roku 1963.

46 *Program nauczania ośmioklasowej szkoły podstawowej, Klasy I–IV*, PZWS, Warszawa 1963.

47 *Ibidem.*

48 *Ibidem.*

W programie nauczania początkowego z 1963 roku podkreślono, że dzieci wstępujące do klasy I mają już spory zasób „przygodnych doświadczeń”[49], orientują się w stosunkach przestrzennych, potrafią przeliczać, dodawać i odejmować, ale umiejętności te wymagają usystematyzowania i uzupełniania. Jednym z głównych celów nauczania matematyki w klasach I–IV w odniesieniu do geometrii było opanowanie elementarnych wiadomości z tego zakresu, a program akcentował realizację treści w kontakcie uczniów z przedmiotami i zjawiskami z najbliższego otoczenia. Z zestawienia treści wynika, że geometria była ujmowana w kontekście mierzenia i manipulowania. W pierwszej klasie szkoły podstawowej celem nauczania geometrii było poznawanie przez ucznia jednostek miar i przyrządów pomiarowych oraz doskonalenie umiejętności mierzenia dokonywane w toku działań. W treściach programowych dla klas I i II nie określono jednoznacznie, jakie figury i bryły były przedmiotem poznania i ćwiczeń. Poznawanie pojęć koła i kwadratu pojawiło się w klasie II i związane było z działalnością praktyczno-techniczną. Treści programowe przeznaczone dla ucznia klasy III akcentowały działania związane z obliczeniami obwodu kwadratu i prostokąta, uwzględniono w nich zagadnienia związane z położeniem względem siebie odcinków i ścian.

W programie z 1963 roku nie pojawiły się bezpośrednio pojęcia odnoszące się do figur przestrzennych. Dziecko miało kontakt z bryłami występującymi pod postacią naturalnych, zróżnicowanych przedmiotów i materiałów (np. patyczki okrągłe, graniaste, szpulki, kawałki drutu, spinacze, gwoździki, wałki, krążki) w działaniu plastyczno-technicznym z wykorzystaniem wielu narzędzi. Geometria wystąpiła również w zadaniach związanych z tworzeniem kompozycji otwartych i zamkniętych.

W programie wyraźnie podkreślono poznawanie świata geometrii w naturalny sposób w wielorakich działaniach praktycznych przez mierzenie, konstruowanie, manipulowanie, planowanie, tworzenie nowych jakości przy użyciu materiałów o zróżnicowanej strukturze, fakturze, formie i jakości. Tabela przedstawiona poniżej zawiera geometryczne treści programowe w *Programie nauczania początkowego dla klas I–III* z 1983 roku[50].

49 *Ibid.*, s. 45.
50 *Programu nauczania początkowego, klasy I–III*, WSiP, Warszawa 1983.

Tab. 6. Treści geometryczne w programie nauczania początkowego[51] z 1983 roku

Klasa	Kształcenie zmysłów i działania psychomotoryczne	Planimetria i stereometria	Geometria w sztuce zdobniczej, architekturze
Klasa I	– stosunki przestrzenne, cechy wielkościowe – rysowanie różnych figur płaskich za pomocą szablonów (np. obrysowywania klocka), układanie ich z patyczków – porównywanie długości boków przez przykładanie ich do siebie – określanie układów przedmiotów i zjawisk występujących w otoczeniu ucznia, rytm jako powtarzalność i miarowość tych samych elementów	– zaznajamianie z kształtami i nazwami podstawowych figur: koła, prostokąta, kwadratu, trójkąta, czworokąta, pięciokąta – rozpoznawanie kształtu tych figur w otoczeniu, na obrazach sytuacyjnych (np. część dachu o kształcie trójkąta, odnajdywanie figur płaskich) – rozpoznawanie kształtu tych figur w otoczeniu, na prostych bryłach (np. prostokątna, kwadratowa ściana pudełka)	– rytm jako cecha układu elementów na płaszczyźnie i w przestrzeni – symetria jedno- i wieloosiowa jako cecha układu elementów na płaszczyźnie i w przestrzeni (projektowanie płaskich i przestrzennych form użytkowych z zastosowaniem układu symetrycznego jedno- lub wieloosiowego – serwetki, ozdoby choinkowe, kwiaty, zaproszenia, kotyliony)
Klasa II	– konstruowanie łamanych, prostokątów i trójkątów o wierzchołkach w węzłach sieci kwadratowej (z wykorzystaniem geoplanu lub kratek w zeszycie) – konstruowanie różnych figur złożonych z danej liczby kwadratów jednostkowych, obliczanie obwodów takich figur (na konkretnych przykładach); liczba kwadratów jednostkowych w danym prostokącie (o długości boków wyrażonych całkowitą liczbą kratek)	– rozpoznawanie odcinków prostopadłych i równoległych na modelach brył i figur płaskich (np. w mozaikach) – wykorzystanie geoplanu, kratek w zeszycie, ekierki i dwukrotnie zgiętej kartki	– symetria jedno- i wieloosiowa jako cecha układu elementów na płaszczyźnie i w przestrzeni – określanie układów przedmiotów i zjawisk występujących w otoczeniu, symetria jedno- i wieloosiowa
Klasa III	– konstruowanie różnorodnych figur w sieci kwadratowej i badanie ich własności – rysowanie odcinków równoległych i odcinków prostopadłych za pomocą szablonów (np. przez obrysowywanie brzegów linijki i ekierki) – kreślenie odcinków w skali 1:2, 2:1, 1:4, 4:1, 1:1 – mierzenie długości odcinków i obliczanie długości łamanej, obwodu trójkąta, czworokąta, prostokąta	– odróżnianie odcinków od linii krzywych i łamanych – ćwiczenia związane z intuicyjnym rozumieniem pojęcia prostej – rozpoznawanie odcinków i ścian prostopadłych oraz odcinków i ścian równoległych na modelach i na rysunkach – mierzenie długości odcinków i obliczanie długości łamanej, obwodu trójkąta, czworokąta, prostokąta	– układ otwarty jako usystematyzowana możliwość powtarzalności motywu

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Programu nauczania początkowego: klasy I–III*[52], zatwierdzonego przez MEN w dn. 30.04.1983 z uwzględnieniem zarządzenia z 18.02.1987, dopuszczony do użytku 16.07.1992.

---

51 *Program nauczania początkowego: klasy I–III,* Ministerstwo Edukacji Narodowej, wyd. 2 popr., Fundacja Rozwoju Edukacji, Warszawa 1992.

52 *Ibidem.*

Program nauczania początkowego z 1983 roku akcentował wszechstronny rozwój osobowości dokonywany w procesie kształcenia umysłowego, moralno-społecznego, estetycznego, technicznego i fizyczno-zdrowotnego. Istotą edukacji było ukazywanie wychowankom scalonego obrazu świata, tj. rozpatrywanie faktów, zjawisk, procesów i wydarzeń z różnych punktów widzenia.

W zakresie planimetrii w *Programie nauczania początkowego* z 1983 roku już w klasie I pojawiły się zagadnienia związane z poznawaniem figur płaskich, takich jak: koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt, czworokąt, pięciokąt. W starszych klasach dzieci poznawały pojęcie prostej, krzywej, łamanej, kąta. W programie promowano aktywność matematyczną dziecka. Widoczny był wpływ dydaktyki Z. Krygowskiej[53], co znalazło wyraz w uwagach do realizacji treści, np. w kl. I:

> Zapoznanie uczniów z figurami geometrycznymi nie może sprowadzać się do percepcji wzrokowej i spostrzegania, np. to jest kwadrat, a to nie jest. Należy zorganizować zabawy i ćwiczenia, np. układanie mozaik, w czasie których dzieci będą miały okazję do samodzielnego badania własności figur poprzez obracanie modeli, przykładanie ich do siebie, nie wprowadza się specjalnych terminów poza nazwami. Nie wprowadza się pojęcia pola ani obwodu. Sieć kwadratowa umożliwia komponowanie różnych ornamentów przez przesuwanie danej figury, odbicie zwierciadlane lub obroty, jest to temat propedeutyczny, kształtujący rozumienie rozmaitych symetrii[54].

Treści geometryczne wyszczególnione w programie z 1983 roku realizowano przez organizowanie dzieciom okazji do mierzenia, konstruowania, rysowania, kreślenia. W zakresie stereometrii – w programie zasugerowano kontakt uczniów z bryłami i zalecenie wyszukiwania w figurach przestrzennych znanych kształtów figur płaskich. W odniesieniu do ornamentyki zaznaczono rozwijanie zdolności powtarzania prostych motywów w układzie otwartym, a w zakresie symetrii poznawanie układów jedno- i wieloosiowych, płaskich i w przestrzeni. Podkreślono tu wykorzystanie pomocy dydaktycznych, np. modeli czy geoplanu, projektowanie form użytkowych. Program ten można określić jako bogaty w treści geometryczne.

W latach dziewięćdziesiątych XX wieku wraz z transformacją ustrojową dokonały się również przemiany w zakresie edukacji wczesnoszkolnej. 15 lutego 1999 roku została wydana przez ministra edukacji narodowej *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla sześcioletnich szkół podstawowych i gimnazjów*[55].

---

[53] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, WSiP, Warszawa 1977; ead., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2, WSiP, Warszawa 1979.

[54] *Program nauczania początkowego: klasy I–III,* Ministerstwo Edukacji Narodowej, wyd. 2 popr.

[55] *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla sześcioletnich szkół podstawowych i gimnazjów*, Dz.U. z dnia 23 lutego 1999 r.

Nauczanie początkowe zostało zmienione na kształcenie zintegrowane, stanowiąc pierwszy etap edukacyjny w polskim systemie kształcenia. W treściach dla klas I–III znalazły się następujące zagadnienia związane z geometrią: figury geometryczne – trójkąt, kwadrat, prostokąt, koło; mierzenie; matematyzowanie sytuacji konkretnych – czyli elementarna problematyka geometryczna. Nauczyciele zyskali jednak autonomię programową, zaistniała wielowariantowość rozwiązań i ujęć treściowych zagadnień określonych w podstawie programowej. Programy, zarówno te dopuszczone do użytku szkolnego i aprobowane przez MEN, jak i wewnętrzne, szkolne programy autorskie, różniły się między sobą pod względem objętości i jakości treści oraz struktury i formy.

* * *

Analiza wybranych programów kształcenia zintegrowanego XX wieku wskazuje na istnienie wspólnych ram edukacji geometrycznej i ujmowanie jej w kategorie zagadnień, takich jak: określenie położenia przedmiotów w przestrzeni, cechy wielkościowe, mierzenie wraz z posługiwaniem się narzędziami i jednostkami miar, figury geometryczne płaskie, obliczanie obwodów. W programach można znaleźć zróżnicowane, ciekawe treści geometryczne, m.in.:

- wskazywanie i opisywanie położenia przedmiotów z użyciem słów: *prostopadle, równolegle, do, ukośnie,* odróżnianie linii prostych, krzywych, łamanych, rozpoznawanie i nazywanie wielokątów, obliczanie obwodu wielokąta[56] – treści te bogate w porównaniu z treściami współczesnych programów;
- porównywanie długości boków kwadratów lub prostokątów przez ich przykładanie do siebie, rysowanie różnych figur płaskich z pomocą szablonów, układanie ich z patyczków, rozpoznawanie odcinków prostopadłych i równoległych w otoczeniu, na modelach brył i figur (kl. II); odróżnianie odcinków od linii krzywych i łamanych, ćwiczenie związane z intuicyjnym rozumieniem pojęcia prostej, obliczanie długości łamanej (kl. III)[57];
- rysowanie z wykorzystaniem szablonów i przyrządów kształtów podstawowych figur płaskich, np. trójkąta, kwadratu, koła, prostokąta; rysowanie za pomocą przyrządów odcinków (kl. II), linii prostych, prostopadłych, równoległych, wykorzystywanie sieci kwadratowej, rysowanie figur płaskich w pomniejszeniu lub powiększeniu (kl. III), projektowanie i wykonywanie płaskich i przestrzennych form użytkowych, uwzględniając zasady kompo-

[56] J. Hanisz, *Program wczesnoszkolnej zintegrowanej edukacji XXI wieku, klasy I–III,* WSiP, Warszawa 1999.

[57] H. Marciniak, U. Mazurkiewicz, M. Szewczyk, *Zintegrowane nauczanie początkowe. Program autorski,* Wyd. Juka, Warszawa 1999.

zycji otwartej i zamkniętej, rytmicznej i symetrycznej (kl. III), obserwowanie cykli i regularności w otoczeniu[58];

- uwzględnianie w pracach plastycznych form plastycznych: linii, plam, brył; kształtu: form prostych i złożonych; faktury, proporcji; wielkości; perspektywy; ruchu statycznego i dynamicznego; figur geometrycznych, takich jak: koło, trójkąt, prostokąt, kwadrat, czworokąt, odcinek, prosta, krzywa, łamana, kąt prosty; wyróżniane boków i wierzchołków w trójkątach i czworokątach, obliczanie obwodu prostokąta, układ elementów (rytm, symetria, jedno- i wieloosiowa)[59].

Treści geometryczne kształcenia zintegrowanego w II połowie XX wieku były bogate i różnorodne. Uwzględniały poznawanie kształtów i przestrzeni w sposób wieloaspektowy. Zgodnie z prawidłami psychologicznymi podkreślano potrzebę działań praktycznych, a szczególnie działań twórczych, takich jak konstruowanie, rysowanie, układanie zgodne z przestrzeganiem zasad kompozycji. Ważne było także mierzenie za pomocą przyrządów mierniczych oraz dokonywanie obliczeń. Wprowadzano dzieci w świat zjawisk i pojęć geometrycznych w toku działań praktycznych i twórczych w najbliższym otoczeniu. Można stwierdzić, że współczesny wymóg aktywności i aktywizacji był spełniany.

2.4. ZAGADNIENIA GEOMETRYCZNE W PODSTAWIE PROGRAMOWEJ I PROGRAMACH EDUKACJI DZIECKA XXI WIEKU

Przemiany społeczeństwa i kultury wywołały potrzebę określenia nowych umiejętności przedszkolaka i ucznia szkoły podstawowej. Wiek XXI przyniósł zatem kontynuację rozpoczętej reformy i wdrażanie nowych priorytetów wychowania, które określono również w nowych dokumentach. W niniejszym podrozdziale przedstawiam aktualnie obowiązujące podstawy programowe wychowania przedszkolnego oraz edukacji wczesnoszkolnej. Przedmiotem rozważań są także wybrane programy wychowania przedszkolnego i edukacji wczesnoszkolnej rozpatrywane pod kątem treści geometrycznych przez pryzmat kilku kryteriów.

---

[58] A. Juszkiewicz, W. Went, *Program nauczania. Poznaję świat i wyrażam siebie. Kształcenie zintegrowane w klasach I–III,* Wyd. Didasko, Warszawa 1999.

[59] H. Matejuk, A. Kaczanowska, G. Wnuk, L. Czarnecka, *Mój świat. Program kształcenia zintegrowanego w szkole podstawowej*, Wyd. Szkolne PWN, Warszawa 1999.

2.4.1. TREŚCI GEOMETRYCZNE W PODSTAWIE PROGRAMOWEJ

Nowa podstawa programowa wychowania przedszkolnego i kształcenia ogólnego, zatwierdzona Rozporządzeniem z 23 grudnia 2008 roku, zaczęła obowiązywać od 1 września 2009 roku[60]. Celem wychowania przedszkolnego, określonym w tym dokumencie, który można bezpośrednio odnieść do geometrii, jest: wspomaganie dzieci w rozwijaniu uzdolnień oraz kształtowanie czynności intelektualnych potrzebnych im w codziennych sytuacjach i dalszej edukacji. Treści geometryczne zawarte w podstawie programowej wychowania przedszkolnego dla XXI wieku wyszczególniono w tabeli przedstawionej poniżej.

Tab. 7. Treści geometryczne w *Podstawie programowej wychowania przedszkolnego* z 2008 roku

Obszar z podstawy programowej	Nazwa obszaru	Umiejętności
4	– wspieranie dzieci w rozwijaniu czynności intelektualnych, które stosują w poznawaniu i rozumieniu siebie i swojego otoczenia	– przewiduje w miarę swoich możliwości, jakie będą skutki czynności manipulacyjnych na przedmiotach (wnioskowanie o wprowadzanych i obserwowanych zmianach
9	– wychowanie przez sztukę – różne formy plastyczne	– umie wypowiadać się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu (takich jak kształt i barwa) w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych – wykazuje zainteresowanie malarstwem, rzeźbą i architekturą (także architekturą zieleni i architekturą wnętrz)
10	– wspomaganie rozwoju umysłowego dzieci poprzez zabawy konstrukcyjne, budzenie zainteresowań technicznych	– wznosi konstrukcje z klocków i tworzy kompozycje z różnorodnych materiałów (np. przyrodniczych), ma poczucie sprawstwa („potrafię to zrobić") i odczuwa radość z wykonanej pracy
13	– wspomaganie rozwoju intelektualnego dzieci wraz z edukacją matematyczną	– rozróżnia stronę lewą i prawą, określa kierunki i ustala położenie obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów – wie, na czym polega pomiar długości, zna proste sposoby mierzenia: krokami, stopa za stopą – zna stałe następstwo dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku

Źródło: *Podstawa programowa wychowania przedszkolnego*[61].

[60] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z dnia 15 stycznia 2009 r.).

[61] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczegól-

Treści matematyczne ujęte są w *Podstawie programowej wychowania przedszkolnego* przede wszystkim w dziale 13: *Wspomaganie rozwoju intelektualnego wraz z edukacją matematyczną*. Występuje tu kilka wskaźników oczekiwanych umiejętności dziecka kończącego edukację przedszkolną. „Geometryczny charakter" mają umiejętności związane z orientacją przestrzenną (rozróżnianie stron lewej i prawej, określanie położenia przedmiotów względem siebie i innych obiektów) oraz pomiarami długości wraz z nieskomplikowanymi sposobami mierzenia (krokami, stopa za stopą). Edukacja geometryczna związana jest z badaniem kształtów i przestrzeni. W podstawie zaakcentowano potrzebę podejmowania przez dziecko różnych aktywności (plastycznej, konstrukcyjnej, zabawowej), które są pomocne w poznawaniu świata matematyki. Zaznaczono, że podejmowane w toku współczesnej edukacji działania dzieci mają być ogólnorozwojowe, uniwersalne, badanie kształtów i przestrzeni ma być wtopione w aktywność sensoryczną i fizyczną. Podobnie jak w przypadku *Minimum programowego* z 1992 roku i *Podstawy programowej* z 1999 roku uszczegółowionych treści geometrycznych dla edukacji najmłodszych należy szukać w programach wychowania przedszkolnego, które mają być zgodne z podstawą.

Interesujące wydaje się także zbadanie zagadnień geometrycznych określonych w podstawie programowej na pierwszym, podstawowym etapie edukacyjnym w systemie kształcenia ogólnego, czyli edukacji wczesnoszkolnej.

Celem edukacji wczesnoszkolnej jest wspomaganie dziecka w rozwoju intelektualnym, emocjonalnym, społecznym, etycznym, fizycznym i estetycznym. Natomiast jedną z najważniejszych umiejętności określonych w podstawie kształcenia ogólnego (Dz.U. nr 4, 2009, poz. 17), zdobywanych przez ucznia w szkole podstawowej, jest „**myślenie matematyczne**, rozumiane jako umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym, oraz prowadzenie elementarnych rozumowań matematycznych"[62].

Umiejętność myślenia matematycznego traktowana jest jako indywidualna zdolność do rozpoznawania i zrozumienia roli, jaką matematyka odgrywa we współczesnym świecie, do formowania sądów opartych na matematycznym rozumowaniu oraz do wykorzystywania umiejętności matematycznych tam, gdzie wymagają tego potrzeby życia codziennego. „Alfabetyzm w dziedzinie matematyki

nych typach szkół (Dz.U. z dnia 15 stycznia 2009 r.). Niniejsze zestawienie tabelaryczne zamieściłam także w publikacji: B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji dzieci...*, s. 288.

62 *Podstawa programowa* stanowi załącznik nr 1 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 1 grudnia 1999 r. zmieniającego rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego (Dz.U. nr 2 z 17 stycznia 2000 r. poz. 18) – podkr. B. B-K.

to wiedza i umiejętności niezbędne do efektywnego rozwiązywania problemów matematycznych powstających w różnych sytuacjach”[63].

Poniżej przedstawiam treści programowe ujęte w nowej podstawie programowej kształcenia ogólnego, odnoszące się do rozwijania myślenia matematycznego w zakresie geometrii.

Tab. 8. Treści geometryczne w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla klas I–III (Dz.U. 2009)

Klasa	Obszar edukacyjny	Umiejętności
I	edukacja matematyczna	– w zakresie czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki: dostrzega symetrię (np. w rysunku motyla), zauważa, że jedna figura jest powiększeniem lub pomniejszeniem drugiej, kontynuuje regularny wzór (np. szlaczek) – w zakresie pomiaru długości: mierzy długość, posługując się np. linijką, porównuje długości obiektów
III	edukacja matematyczna	– mierzy i zapisuje wynik pomiaru długości, szerokości i wysokości przedmiotów oraz odległości, posługuje się jednostkami: milimetr, centymetr, metr – rozpoznaje i nazywa koła, kwadraty, prostokąty i trójkąty (również nietypowe, położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy figury zachodzą na siebie) – rysuje odcinki o podanej długości – oblicza obwody trójkątów, kwadratów i prostokątów (w centymetrach) – rysuje drugą połowę figury symetrycznej, rysuje figury w powiększeniu i pomniejszeniu, kontynuuje regularności w prostych motywach (np. szlaczki, rozety)

Źródło: *Podstawa programowa kształcenia ogólnego*[64].

Treści ujęte w polskiej podstawie programowej jako umiejętności ucznia kończącego klasę I i III akcentują mierzenie, ważenie, odmierzanie objętości, pomiar czasu, rysowanie modeli. Wiedza i umiejętności związane z planimetrią odnoszą się do rozpoznawania i nazywania podstawowych figur geometrycznych, tworzenia odcinków, tworzenia prostych symetrycznych rysunków. Stereometria praktycznie nie występuje w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla klas I–III.

---

63 *Kompetencje kluczowe. Realizacja koncepcji na poziomie szkolnictwa obowiązkowego*, EURIDYCE Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji, Warszawa 2005, s. 15.

64 *Podstawa programowa* stanowi załącznik nr 1 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 1 grudnia 1999 r. zmieniającego rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego (Dz.U. nr 2 z 17 stycznia 2000 r. poz. 18). Zestawienie to zamieściłam wcześniej w opracowaniu B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji dzieci...*, s. 288.

* * *

Problematyka kształcenia geometrycznego na etapie przedszkolnym i wczesnoszkolnym jest w obu współcześnie obowiązujących podstawach programowych wąska. Ujęte są w niej fundamentalne treści geometryczne. Stanowią one: manipulowanie obiektami, działalność plastyczno-konstrukcyjną, mierzenie, poznawanie płaskich figur geometrycznych, dostrzeganie elementarnej symetrii, a w edukacji wczesnoszkolnej – kreślenie odcinków i obliczanie obwodów figur geometrycznych. Potwierdza to opinia E. Swobody, która mówi, że geometria wczesnoszkolna praktycznie nie istnieje lub pełni rolę pomocniczą w stosunku do arytmetyki, w odróżnieniu od edukacji realizowanej w Europie Zachodniej, gdzie powstają programy nauczania matematyki wczesnoszkolnej, w których pojawiają się takie zagadnienia, jak symetria, podobieństwo i przystawanie figur, geometria przestrzenna[65]. Podstawa programowa pomija zagadnienia związane z pracą z dziećmi uzdolnionymi matematycznie. Należy ich szukać w wybranych programach edukacyjnych bądź programach kół zainteresowań.

2.4.2. PLANIMETRIA, STEREOMETRIA I SYMETRIA W WYBRANYCH PROGRAMACH XXI WIEKU

Z założenia podstawa programowa nie może być zbyt ogólna ani zbyt szczegółowa, dlatego też jej treści są słusznie rozbudowywane w autorskich programach nauczania. Należy przy tym zauważyć, że zakres umiejętności geometrycznych, sposoby ich osiągania oraz propozycje rozwiązań metodycznych są we współczesnych programach kształcenia przedstawiane odmiennie. Autorzy prezentują własne rozwiązania w zakresie treści i sposobów ich realizacji, a zagadnienia i aktywności geometryczne są odmiennie akcentowane. Z tego powodu postanowiłam się im przyjrzeć bliżej i porównać wybrane programy kształcenia, biorąc pod uwagę różne kryteria. Na potrzeby przeglądu przedmiotem analizy uczyniłam w niniejszym rozdziale kilka programów wychowania przedszkolnego oraz edukacji wczesnoszkolnej[66]. W odniesieniu do etapu przedszkolnego wybrałam cztery programy edukacyjne, w tym trzy programy wychowania przedszkolnego, rekomendowane przez MEN, oraz znany nauczycielom po roku 1997 i popu-

65 E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 52.

66 Niniejszy rozdział nawiązuje do wcześniejszej analizy czterech programów zawartych w opracowaniu B. Bilewicz-Kuźnia, *Geometria w edukacji najmłodszych – odcinek na ścieżce, dekoracja czy dar zapomniany?* [w:] M. Kowalik-Olubińska (red.), *Dzieciństwo i wczesna edukacja w dynamicznie zmieniającym się świecie*, Wyd. Adam Marszałek, Toruń 2012, s. 301–318.

larny w środowisku edukacyjnym program edukacji matematycznej autorstwa E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej *Dziecięca matematyka*[67]. W odniesieniu do edukacji wczesnoszkolnej wybrałam trzy programy, wyróżnione w konkursie MEN w 2012 roku. Wszystkie programy są polecane przez Ośrodek Rozwoju Edukacji (ORE)[68] i udostępnione na portalu dla nauczycieli prowadzonym przez niego.

Dla przejrzystości układu rozdziału wydzieliłam w nim dwa podrozdziały. Analiza porównawcza programów wychowania przedszkolnego została zawarta w pierwszym podrozdziale (2.4.2.1), zaś programów edukacji wczesnoszkolnej oddzielnie, w kolejnym (2.4.2.2).

Analiza prowadzona jest według następującego porządku: najpierw analizuję podejście autorów do rozwoju dziecka i jego osiągnięć, zestawiam treści porównywanych programów w układzie tabelarycznym, dalej skupiam się szczegółowo na ujmowaniu stosunków przestrzennych. Inne kategorie porównawcze to eksponowane rodzaje aktywności i stopień wyjścia poza podstawę programową. Kryteria analizy programów nawiązują do celów edukacji geometrycznej w ujęciu G. Trelińskiego, przedstawionych w rozdziale 1.3.

2.4.2.1. Programy wychowania przedszkolnego

Analizie porównawczej poddałam cztery programy edukacyjno-wychowawcze. *Dziecięca matematyka* E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej[69] jest uzupełniającym programem edukacji przedszkolnej w zakresie matematyki. Inne trzy programy wychowania przedszkolnego to: *Dobry start przedszkolaka* Moniki Rościszewskiej-Woźniak[70], *Zanim będę uczniem* Elżbiety Tokarskiej i Jolanty Kopały[71] oraz *Ku dziecku* Barbary Bilewicz-Kuźni i Teresy Parczewskiej[72].

---

67 E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka, Edukacja matematyczna dzieci w domu, przedszkolu i szkole*, WSiP, Warszawa 1997.

68 Programy nagrodzone lub wyróżnione w 2009, 2010 i 2013 roku w konkursach Ministerstwa Edukacji Narodowej na najlepsze programy wychowania przedszkolnego oraz edukacji wczesnoszkolnej prowadzone przez CODN (Centralny Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli), później ORE. CODN z dniem 1 stycznia 2010 roku, w wyniku połączenia z Centrum Metodycznym Pomocy Psychologiczno-Pedagogicznej, został przekształcony w Ośrodek Rozwoju Edukacji (ORE) i jest publiczną placówką doskonalenia nauczycieli o zasięgu ogólnokrajowym prowadzoną przez ministra edukacji narodowej.

69 E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka...*

70 M. Rościszewska-Woźniak, *Dobry start przedszkolaka*, Wyd. Edukacyjne Żak, Warszawa 2010.

71 E. Tokarska, J. Kopała, *Zanim będę uczniem*, Wyd. Edukacja Polska, Marki 2010.

72 B. Bilewicz-Kuźnia, T. Parczewska, *Entliczek pentliczek*, *Ku dziecku – program wychowania przedszkolnego,* Wyd. Nowa Era, Warszawa 2010, s. 12–14.

Kolejność prezentowania kryteriów porównawczych i w ich zakresie programów nie jest przypadkowa. Porównując treści i zagadnienia geometryczne zawarte w programach, interesowało mnie podejście do rozwoju dziecka, zakres treści programowych, a szczególnie zagadnienia dotyczące stosunków przestrzennych, położenia przedmiotów w przestrzeni, figur i relacji, rodzaje aktywności i aktywizowanie dziecka, zgodność z podstawą programową oraz stopień wychodzenia treści poza podstawę.

Uwzględniając powyższe kryteria porównawcze, najpierw prezentuję najdłużej znany nauczycielom program *Dziecięca matematyka*, następnie programy *Dobry start przedszkolaka*, *Zanim będę uczniem* i *Ku dziecku*.

Podejście do rozwoju dziecka i jego osiągnięć w programach wychowania przedszkolnego

Według autorek programu *Dziecięca matematyka* E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej[73] dzieci rozwijają się w zróżnicowanym tempie, a zawarte w programie treści mają pomóc wszystkim dzieciom w stworzeniu im warunków do pełnego rozwoju ich możliwości intelektualnych. Założeniem programu jest to, by:

– dzieci, które rozwijają się bardzo dobrze, mogły być jeszcze lepsze, pod warunkiem, że rozwinie się ich specjalne uzdolnienia;
– dzieci, które rozwijają się wolniej, należy skłonić do szybszego tempa rozwoju, by mogły rozpocząć naukę szkolną bez ponoszenia porażek;
– dzieciom, które rozwijają się w sposób nieharmonijny, umożliwić wyrównywanie deficytów rozwojowych i nie hamować w zakresie tych sfer, w których osiągają ponadprzeciętne wyniki[74]. W takim podejściu dostrzega się pozytywne ukierunkowanie, akcentowany jest indywidualizm i podmiotowość, które są ważne dla skutecznych oddziaływań wychowawczych.

E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska ujmują treści programowe, uwzględniając wiek dzieci. W programie znajdują się zagadnienia dla trzy-, cztero-, pięcio- i sześciolatków. Autorki podkreślają, że dzieci pracują w odmiennym tempie i zwracają uwagę na poszanowanie ich odrębności, wyjątkowości i specyfiki rozwojowej. Zdaniem autorek programu *Dziecięca matematyka* efekty wspomagania rozwoju, a także wyniki edukacji matematycznej zależą od korzystnego dopasowania treści kształcenia do możliwości rozwojowych dzieci[75]. Podział na grupy wiekowe umożliwia, szczególnie młodemu nauczycielowi, orientację w zakresie osiągnięć rozwojowych dziecka w określonym wieku. Podkreślenie rozwojowych

---

73 E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka...*
74 *Ibid.,* s. 11.
75 Eaed, *Dziecięca matematyka. Program dla przedszkoli, klas zerowych i placówek integracyjnych,* WSiP, Warszawa 1999, s. 6.

różnic indywidualnych i zaakcentowanie spersonalizowanego podejścia do każdego dziecka jest istotnym walorem programu i cenną wskazówką praktyczną dla nauczycieli, studentów i rodziców.

E. Tokarska i J. Kopała, autorki programu *Zanim będę uczniem,* w charakterystyce obszaru programowego: *Wspomaganie rozwoju intelektualnego dzieci wraz z edukacją matematyczną* odnoszą się do psychologii rozwojowej dziecka i wyjaśniają, że na rozwój intelektualny dziecka mają wpływ zmiany zachodzące w spostrzeganiu, uwadze, pamięci i myśleniu, a kształtowanie się procesów poznawczych pozwala dziecku na przechowywanie, odtwarzanie i przetwarzanie informacji[76]. Czytelnik znajdzie w programie szczegółowe wyjaśnienia dotyczące rozwoju procesów poznawczych i warte podkreślenia zaakcentowanie zasady stopniowania trudności podczas organizowania i przebiegu procesu uczenia się dziecka. W zestawieniu treści programowych widoczne jest podejście stadialne. E. Tokarska i J. Kopała uznają, że dziecko stopniowo osiąga kolejne, odmienne jakościowo i ilościowo etapy. Autorki wprowadzają charakterystykę etapów osiągania umiejętności geometrycznych w poszczególnych zakresach tematycznych i wyszczególniają trzy stadia rozwoju każdej umiejętności matematycznej: Etap I, II i III. W zestawieniach dostrzega się trafność wyszczególnionych umiejętności w odniesieniu do wieku dziecka. Są tu przedstawione umiejętności Etapu I – typowe dla przeciętnego dziecka trzyletniego, Etapu II – charakterystyczne dla czterolatka, i Etapu III – zwykle osiągane przez dzieci pięcioletnie. W moim przekonaniu takie ujęcie treści jest bardzo użyteczne w pracy początkującego nauczyciela, ponadto odwołuje się do teorii P. van Hielego.

M. Rościszewska-Woźniak w programie *Dobry start przedszkolaka*[77] akcentuje, że dziecko jest niepowtarzalną osobą, jego rozwój odbywa się wielotorowo i w sposób dynamiczny. Twórczyni programu uznaje, że proces edukacyjny jest przeżyciem radosnym i przynosi satysfakcję, stąd można wnioskować, że dążenie do tego stanu przyświeca również wczesnej edukacji geometrycznej. Podczas planowania działań o charakterze geometrycznym, zdaniem autorki, ważne jest branie pod uwagę wymiaru normatywnego rozwoju dziecka, odnoszenie się do osiągnięć odpowiednich dla wieku, ale także poziomu rozwoju wychowanków. Projektowane aktywności powinny być adekwatne do wymienionych kwestii. W tym stanowisku autorka odwołuje się do koncepcji rozwojowych, gdzie standardy, prawidłowości i normy rozwojowe, zgodne z wiekiem życia dziecka, są punktem odniesienia, ale także podtrzymuje pogląd J. Brunera, że jeśli dziecko jest gotowe i przejawia zainteresowanie, możemy je wprowadzać w nowe zagadnienia i dostarczać mu nowej wiedzy.

76 E. Tokarska, J. Kopała, *Zanim będę uczniem*, Wyd. Edukacja Polska, Marki 2010, s. 114.

77 M. Rościszewska-Woźniak, *Dobry start przedszkolaka*, Wyd. Edukacyjne Żak, Warszawa 2010.

Ideą przewodnią programu *Ku dziecku* B. Bilewicz-Kuźni i T. Parczewskiej jest skoncentrowanie się na indywidualnym rozwoju dziecka, odkrywanie wielorakich inteligencji, indywidualnych zdolności i zainteresowań dzieci, pobudzanie ich i wzmacnianie.

Program opiera się na założeniu, że nie wszystkie dzieci mają takie same zainteresowania i zdolności, a także nie wszyscy nauczyciele uczą w ten sam sposób[78]. Autorki są zdania, że w procesie edukacyjnym należy uwzględniać różnice indywidualne, opierając się na osiągnięciach współczesnej psychopedagogiki. Program przeznaczony jest dla dzieci będących na różnych ścieżkach rozwoju, dzieci o specjalnych potrzebach edukacyjnych, rozwijających się prawidłowo oraz dzieci o ponadprzeciętnych wymaganiach edukacyjnych i wychowawczych[79]. Czytelnik odnajdzie tu treści, które mają odniesienie do dziewięciu rodzajów inteligencji. W odniesieniu do geometrii są to inteligencja logiczno-matematyczna oraz wizualno-przestrzenna.

Treści geometryczne zawarte w programach wychowania przedszkolnego

Program edukacji matematycznej *Dziecięca matematyka* E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej jest przeznaczony do pracy w placówkach przedszkolnych, tzw. klasach zerowych, placówkach integracyjnych i do pracy w domu. Jego treści koncentrują się wokół czternastu bloków. Z uwagi na przedmiot zainteresowań w niniejszym opracowaniu omawiam jedynie treści związane z edukacją geometryczną. Poniżej znajduje się ich zestawienie[80].

Treści edukacyjne programu *Dziecięca matematyka* zestawione są w czternastu rozdziałach, zwanych *Obszarami*. Wśród wszystkich treści znajdziemy cztery obszary odnoszące się do geometrii, które dla przejrzystości opracowania zestawiłam w tabelę. Znajdują się tu zagadnienia, takie jak: orientacja przestrzenna, rytmy i rytmiczna organizacja czasu, długość, intuicje geometryczne. W programie występuje podział treści ze względu na wiek dzieci, czyli dla trzy-, cztero-, pięcio- i sześciolatków. Autorki proponują, by we wszystkich grupach wiekowych doskonalić orientację dziecka w przestrzeni oraz zdolność dostrzegania regularności rytmicznych. Przedstawione propozycje akcentują wagę kompetencji matematycznych związanych z orientacją w bliższej i dalszej przestrzeni, poznawaniem relacji przestrzennych, doskonaleniem rozumienia i określania położenia przedmiotów wobec siebie, uwzględniając punkt widzenia własnej osoby i niezależnie od niej.

78 B. Bilewicz-Kuźnia, T. Parczewska, *Entliczek pentliczek*..., s. 9.
79 *Ibidem.*
80 *Ibid.*, s. 12–48.

Tab. 9. Treści edukacyjne dotyczące geometrii w programie *Dziecięca matematyka*

Obszar	Trzylatki	Czterolatki	Pięciolatki	Sześciolatki
Orientacja przestrzenna	l. Kształtowanie świadomości schematu własnego ciała. 2. Uświadamianie dzieciom relacji: „Ja i moje otoczenie". 3. Rysunek człowieka.	1. Orientacja w przestrzeni i kształtowanie własnego punktu widzenia. 2. Porozumiewanie się co do miejsca dziecka w przestrzeni i położenia przedmiotów, które się wokół niego znajdują. 3. Rysunek postaci człowieka. 4. Rozwijanie zdolności obdarzania uwagą drugiej osoby.	1. Orientacja w przestrzeni – kształtowanie własnego punktu widzenia: „Ja i moje otoczenie". 2. Drugi człowiek i jego otoczenie: przyjmowanie punktu widzenia drugiej osoby. 3. Poznawanie schematu ciała drugiej osoby. 4. Obdarzanie uwagą drugiej osoby.	1. Orientacja w przestrzeni. Precyzowanie własnego punktu widzenia. 2. Drugi człowiek w przestrzeni, wdrażanie do przyjmowania punktu widzenia drugiej osoby. 3. Wytyczanie kierunków od obranego przedmiotu. 4. Orientowanie się na kartce papieru.
Rytmy	1. Skupianie uwagi na szeregach powtarzających się przedmiotów. Dostrzeganie tego, co się powtarza, i kontynuowanie rytmu przez dokładanie przedmiotów.	1. Skupianie uwagi na szeregach i wychwytywanie powtarzających się układów rytmicznych. 2. Dostrzeganie przemienności dnia i nocy.	1. Skupianie uwagi na szeregach i wychwytywanie powtarzających się sekwencji i kontynuowanie rytmu. 2. Układanie szlaczków, zgodnych ze słowną instrukcją. 3. Wdrażanie do przekładania dostrzeżonych regularności z jednej reprezentacji na inną, a potem na jeszcze inną. 4. Rytmiczna organizacja czasu (dnia i nocy, pór roku).	1. Skupianie uwagi na szeregach i wychwytywanie powtarzających się sekwencji oraz kontynuowanie ich, rytmy z klocków, rytmy wysłuchane i wygrywane, układy rytmiczne pokazane całym ciałem. 2. Wdrażanie do przekładania dostrzeżonych regularności z jednej reprezentacji na inną, a potem na jeszcze inną. 3. Rytmiczna organizacja czasu (dnia i nocy, pór roku, kolejność dni w tygodniu, miesięcy w roku).

Długość: kształtowanie umiejętności mierzenia i pomaganie dzieciom w uświadomieniu sobie stałości długości			1. Porównywanie obiektów i szacowanie: czy są tej samej długości (wielkości), ten jest dłuższy (większy). 2. Mierzenie długości krokami i stopa za stopą. Stosowanie tych umiejętności w sytuacjach życiowych.	1. Porównywanie obiektów i szacowanie wielkości dwóch, a potem trzech obiektów, ustalanie, czy są tej samej długości, który jest dłuższy. 2. Mierzenie długości krokami i stopa za stopą, łokciami, dłonią i palcami. Zastosowanie tych umiejętności w sytuacjach życiowych. 3. Odmierzanie długości klockami, patykiem, sznurkiem. Stosowanie tych umiejętności w codziennych sytuacjach. 4. Doświadczenia pomagające dzieciom w uświadomieniu sobie stałości długości. Zapoznanie dzieci z narzędziami pomiaru długości: miara krawiecka i stolarska, taśma miernicza, linijka szkolna. Posługiwanie się tymi narzędziami i mierzenie.
Intuicje geometryczne			1. Wyodrębnianie kształtu z pozostałych cech przedmiotów i nazywanie go: kwadratowe – kwadrat, prostokątne – prostokąt, trójkątne – trójkąt, okrągłe – koło itp. 2. Składanie większych całości: parkiety z płytek, konstrukcje z klocków.	1. Ustalanie na poziomie intuicji, czym jest kwadrat, trójkąt, prostokąt i koło. 2. Efekt lustrzanego odbicia, przesunięcia i obrotu figur geometrycznych: osobiste doświadczenia i wypowiadanie się na temat uzyskanych efektów. 3. Projektowanie parkietów, ogrodów, tkanin na sukienki z kartoników o różnych kształtach, stosując przesunięcia, obroty i złożenia.

Źródło: E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka. Program dla przedszkoli, klas zerowych i placówek integracyjnych,* WSiP, Warszawa 1999.

Podkreślenie zagadnień związanych z dostrzeganiem i badaniem regularności rytmicznych pozwala utrwalać nabyte przez dziecko umiejętności i przygotować je do poznawania bardziej złożonych relacji przestrzennych.

Autorki programu proponują, by pojęcie długości budować w umysłach starszych przedszkolaków, dzieci pięcio- i sześcioletnich. Prawdopodobnie mają one na względzie rozwój funkcji spostrzegania i niedoskonałość procesów percepcji wzorkowej, co umożliwia małym przedszkolakom dostrzeganie niewielkich róż-

Tab. 10. Treści geometryczne w programie *Dobry start przedszkolaka*

Zakres edukacji	Treści edukacyjne	Rozwój wiedzy, umiejętności, dyspozycji i uczuć dzieci
Orientacja w przestrzeni	położenie przedmiotów w przestrzeni (pod, nad, za, przed, obok, wewnątrz, na zewnątrz) – wprowadzenie pojęć w przestrzeni: prawa – lewa strona, góra – dół – kierunki lewo – prawo, kierowanie się instrukcjami w ruchu: w górę, na dół, w prawo, w lewo	– poznanie schematu własnego ciała, kierunków w przestrzeni – znajomość kierunków i umiejętność posługiwania się nimi (prawo, lewo, do przodu, w bok, do tyłu)
Rytmy i organizacja czasu	– tworzenie szeregów, powtarzanie rytmów słuchowo i wzrokowo – przemienność pór dnia i roku – rytmy w naturze – pojęcia określające czas – długo, krótko, przedtem, teraz, potem – zapoznanie z pojęciami: godzina, dzień, tydzień, miesiąc, rok, zapoznanie z kalendarzem – pomiary czasu – szybko, wolno – zapoznanie z narzędziami do pomiaru czasu	– zauważanie rytmów i regularności w przyrodzie i codziennym życiu – znajomość pojęć określających czas i zmiany w otoczeniu – posługiwanie się pojęciami związanymi z upływem czasu
Figury geometryczne	– poznanie podstawowych figur geometrycznych i wyodrębnianie ich z otoczenia, tworzenie własnych kompozycji z kształtów geometrycznych	– umiejętność rozpoznawania i nazywania figur płaskich (trójkąt, prostokąt, kwadrat, koło)
Wymiary	– poznawanie pojęcia długości, porównywanie długości (dłuższy, krótszy) – szeregowanie różnych wielkości – porównywanie wielkości: duży, mały, większy, mniejszy – pojęcie wysokości (wysoki, niski), porównywanie wysokości (wyższy, niższy) – pojęcie i porównywanie szerokości (szeroki, wąski, gruby, chudy, grubszy, cieńszy)	– umiejętność mierzenia różnymi miarami, porównywanie długości, wysokości, szerokości – posługiwanie się pojęciami związanymi z porównywaniem i szeregowaniem; umiejętność rozróżniania przedmiotów według ich rozmiarów

Źródło: M. Rościszewska-Woźniak, *Dobry start przedszkolaka*.

nic w wyglądzie kilku porównywanych przedmiotów czy porównywanie wielu obiektów tą samą miarą. Rozróżnienie ze względu na wiek wydaje się dla rodzica i wychowawcy punktem odniesienia w działaniach planujących i diagnozujących rozwój kompetencji matematycznych dziecka, a takie zestawienie może ułatwiać orientację w możliwościach rozwojowych dzieci w poszczególnym wieku i wskazywać kierunek dalszej pracy. Zdaniem autorek programu budowanie wiedzy geometrycznej dotyczącej figur płaskich należy rozpocząć u dzieci w wieku pięciu i kontynuować w wieku sześciu lat. Jak wynika z powyższego zestawienia, w programie *Dziecięca matematyka* występuje bogaty zestaw umiejętności geometrycznych. Nie dziwi zatem, że program jest bardzo popularny w środowisku nauczycieli i jest wykorzystywany jako dodatkowy program edukacji przedszkolnej.

Drugi analizowany program to opracowanie M. Rościszewskiej-Woźniak. Treści geometryczne znajdują się w rozdziale *Edukacja matematyczna*. Czytelnik znajdzie tu zagadnienia, które zestawiłam w tab. 11.

Treści geometryczne programu *Dobry start przedszkolaka* są przedstawione w układzie tabelarycznym. Ich ujęcie uwzględnia podział na dwie kategorie: treści, które autorka utożsamia z aktywną działalnością matematyczną, i założone skutki działania, czyli cele edukacyjne, które autorka traktuje jako umiejętności rozwojowe. Program nie uwzględnia podziału na grupy wiekowe. Wyszczególnione zagadnienia, będące umiejętnościami matematycznymi, stanowią podstawowe zagadnienia geometryczne i odnoszą się do trzech zakresów: orientacji w przestrzeni, rytmów, poznania figur geometrycznych oraz wymiarów.

W programie wychowania przedszkolnego *Zanim będę uczniem,* autorstwa E. Tokarskiej i J. Kopały, zagadnienia geometryczne przedstawiają się następująco:

Tab. 11. Treści geometryczne w programie *Zanim będę uczniem*

Obszar	I etap	II etap	III etap
1	2	3	4
Kształtowanie orientacji przestrzennej	– rozumie i używa pojęcia określające położenie przedmiotów w przestrzeni: wysoko, nisko, obok, na, pod, za, przed	– określa położenie przedmiotów w przestrzeni, używając zwrotów: między, wyżej, niżej, bliżej, dalej	– samodzielnie określa położenie przedmiotów w przestrzeni (umie określić położenie przedmiotów w odniesieniu do własnego ciała: na prawo, na lewo, naprzeciw)

Tab. 11, cd.

1	2	3	4
Rozpoznawanie kształtów geometrycznych	– rozpoznaje kształt koła i używa jego nazwy – potrafi wskazać przedmioty w kształcie koła i wyróżnić je spośród innych obiektów – tworzy kompozycje z różnych figur geometrycznych bez ich nazywania	– rozpoznaje kształty figur geometrycznych płaskich i przestrzennych oraz używa ich nazw: koło, kwadrat, trójkąt, kula – potrafi odwzorować poznane kształty figur płaskich za pomocą dostępnego materiału – potrafi układać dowolne kompozycje z klocków w kształcie figur geometrycznych – próbuje odwzorowywać kształt poznanych figur, używając np. drucików kreatywnych, sznurka – odwzorowuje układy przestrzenne utworzone z figur i brył geometrycznych, np. klocków, mozaiki – tworzy kompozycje z figur geometrycznych na ograniczonej powierzchni	– rozpoznaje kształty figur geometrycznych płaskich i przestrzennych oraz używa ich nazw: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt, kula, sześcian – dostrzega podobieństwa i różnice między kształtami figur – potrafi odwzorować kształty figur za pomocą dostępnego materiału, np. wycina z papieru, modeluje z plasteliny – dostrzega symetrię występującą w naturze, np. skrzydła motyla, lub w sytuacjach zadaniowych, np. wycinanki ludowe – wie, w jaki sposób powstaje lustrzane odbicie
Dokonywanie czynności pomiarowych	– porównuje wielkości: długi, krótki, wysoki, niski	– podejmuje próby mierzenia długości krokami, stopa za stopą – porównuje długość, np. taki sam, długi, dłuższy, krótki, krótszy, oraz wysokość przedmiotów, np. niski, niższy, wysoki, wyższy	– wie, na czym polega pomiar długości, i zna proste sposoby mierzenia: krokami, stopa za stopą – dokonuje pomiaru długości, posługując się wspólną miarą, np. sznurkiem – stosuje nabyte umiejętności w praktycznym działaniu; określa wysokość, porządkując przedmioty od najniższego do najwyższego i odwrotnie

Źródło: E. Tokarska, J. Kopała, *Zanim będę uczniem*.

Treści geometryczne programu *Zanim będę uczniem* mieszczą się w 13. obszarze podstawy programowej i w tym programie są przedstawione w rozdziale pt. *Etapy osiągania umiejętności i sposoby ich realizacji w ramach obszarów edukacyjnych.* Przedstawione są w porządku punktowym, według zakresu umiejętności, np. kształtowanie orientacji przestrzennej i wykaz umiejętności, określony jako *Etapy osiągania umiejętności.* Na potrzeby tego opracowania zestawiam geometryczne

treści programu w tabeli. W podziale treści dostrzega się etapowość zagadnień występującą pod postacią wyszczególnienia etapu I, II, III, a w ich ramach występuje zestaw umiejętności szczegółowych. Etapy te nasuwają czytelnikowi skojarzenie i chęć odniesienia katalogu umiejętności do osiągnięć rozwojowych przeciętnie rozwijającego się dziecka 3-, 4- lub 5-letniego, ale autorki bezpośrednio nie sugerują takiego nawiązania.

Edukacja geometryczna obejmuje – podobnie jak w poprzednich programach – orientację przestrzenną, rozpoznawanie kształtów geometrycznych, dokonywanie czynności pomiarowych, dostrzeganie powtarzalności układów i następstwo w czasie. Najbardziej rozbudowano treści dotyczące figur geometrycznych, zwłaszcza w II i III etapie.

Zagadnienia geometryczne ujęte w programie *Ku dziecku* B. Bilewicz-Kuźni i T. Parczewskiej[81] znajdują się w kilku obszarach, np. 4, 9, 10, 13 i 14, choć najwięcej jest ich w matematycznym bloku 13 – *Wspomaganie rozwoju intelektualnego wraz z edukacją matematyczną.* Zestawienie szczegółowe przedstawia tab. 12.

Tab. 12. Treści geometryczne w programie *Ku dziecku*

Obszar z podstawy programowej	Treści edukacyjne	Wiadomości i umiejętności, które powinno zdobyć dziecko
1	2	3
4. Wspieranie dzieci w rozwijaniu czynności intelektualnych, które stosują w poznawaniu i rozumieniu siebie i swojego otoczenia	Cechy przedmiotów i zjawisk: – porównywanie i porządkowanie elementów, dobieranie przedmiotów ze względu na wspólną cechę lub kilka cech wspólnych (1, 2, 3, 4 cechy jakościowe) – odnajdywanie jakiegoś obiektu spośród innych ze względu na określone kryterium Logika i matematyka w życiu codziennym dziecka: – rozwiązywanie problemów życia codziennego o charakterze logiczno-matematycznym (ciężar, objętość, długość, czas) Jak używać swojego umysłu, by lepiej radzić sobie w sytuacjach, gdy trzeba coś zapamiętać? Zapamiętywanie wzorów graficznych (szlaczki, rozety, kompozycje) oraz sekwencji dźwiękowych, wizualnych i ruchowych	1) przewiduje, w miarę swoich możliwości, jakie będą skutki czynności manipulacyjnych na przedmiotach (wnioskowanie o wprowadzanych i obserwowanych zmianach) 2) grupuje obiekty w sensowny sposób (klasyfikuje) i formułuje uogólnienia typu: to do tego pasuje, te obiekty są podobne, a te są inne 3) stara się łączyć przyczynę ze skutkiem i próbuje przewidywać, co się może zdarzyć Rozszerzony zakres wiadomości i umiejętności dziecka: – potrafi świadomie kierować uwagą, by coś zapamiętać (bodźce sensoryczne, graficzne, dźwiękowe i ruchowe)

[81] B. Bilewicz-Kuźnia, T. Parczewska, *Entliczek pentliczek...*, s. 12–14.

Tab. 12, cd.

1	2	3
9. Wychowanie przez sztukę – różne formy plastyczne	Projektowanie pomieszczeń: tworzenie makiet wnętrz, wykorzystywanie surowców wtórnych i materiału przyrodniczego	1) umie wypowiadać się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu (takich jak kształt i barwa) w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych
10. Wspomaganie rozwoju umysłowego dzieci przez zabawy konstrukcyjne, budzenie zainteresowań	Działalność konstrukcyjna: projektowanie, planowanie i konsekwentne realizowanie budowli i innych prac konstruowanych z materiałów przyrodniczych, tektury, kartonów, materiału sypkiego (piasek, glina), konstruowanie z różnych materiałów przemysłowych oraz tworzyw naturalnych; zabawy badawcze i proste eksperymenty	1) wznosi konstrukcje z klocków i tworzy kompozycje z różnorodnych materiałów (np. przyrodniczych), ma poczucie sprawstwa („potrafię to zrobić”) i odczuwa radość z wykonanej pracy
13. Wspomaganie rozwoju intelektualnego dzieci wraz z edukacją matematyczną	Klasyfikowanie zbiorów przedmiotów: zbiory obiektów konkretnych (owoców, warzyw, zabawek, kwiatów) i abstrakcyjnych (figury geometryczne) na podstawie 1, 2, 3, 4 cech jakościowych (wielkość, kolor, kształt, przeznaczenie); porównywanie liczebności tworzonych zbiorów, szacowanie (na oko) i za pomocą określeń: dużo – mało, równo, mniej Mierzenie obiektów: stopa za stopą, krokami, łokciem, sznurkiem, patykiem, miarką krawiecką, stolarską; narzędzia miernicze: linijka, ekierka, prędkościomierz Wielozmysłowe i czynnościowe poznawanie figur płaskich (koło, trójkąt, kwadrat, prostokąt, wielokąt, elipsa) i brył (walec, stożek, graniastosłupy, ostrosłup, sześcian, prostopadłościan)	1) liczy obiekty i odróżnia błędne liczenie od poprawnego 2) wyznacza wynik dodawania i odejmowania 3) ustala równoliczność dwóch zbiorów, a także posługuje się liczebnikami porządkowymi 5) wie, na czym polega pomiar długości, i zna proste sposoby mierzenia: krokami, stopa za stopą; Rozszerzony zakres wiadomości i umiejętności dziecka: – rozpoznaje i nazywa bryły geometryczne
14. Kształtowanie gotowości do nauki czytania i pisania	Orientacja w kierunkach przestrzennych: poznanie schematu własnego ciała, według poczucia to jestem ja, tak wyglądam, doświadczanie własnych ruchów i orientacja czuciowa (odczuwanie i nazywanie poszczególnych części ciała, części twarzy, ciała), werbalizowanie czynności wykonywanych przez dzieci poznanie przestrzeni: według kierunku pionowego (w górze, na dole, na, nad, pod, wysoko, nisko, wyżej, niżej, naprzeciw), poziomego (w przód, do przodu, w tył, do tyłu, obok), w prawo, w lewo (wg położenia swego serca)	1) rozróżnia stronę lewą i prawą, określa kierunki i ustala położenie obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów 2) potrafi określić kierunki oraz miejsca na kartce papieru, rozumie polecenia typu: narysuj kółko w lewym górnym rogu kartki, narysuj szlaczek, zaczynając od lewej strony kartki

Źródło: B. Bilewicz-Kuźnia, T. Parczewska, *Entliczek Pentliczek*...

W programie *Ku dziecku* najwięcej treści geometrycznych jest w 13. obszarze podstawy programowej, zatytułowanym *Wspomaganie rozwoju intelektualnego wraz z edukacją matematyczną*. Inne działania dzieci, także związane ze światem geometrii, światem kształtów i wymiarów, znajdują się w 4., 9., 10. i 14. obszarze. Obszary geometryczne obejmują, podobnie jak w innych programach: orientację przestrzenną, rytmy i pojęcia czasowe, mierzenie obiektów, poznawanie figur płaskich i brył. Treści przedstawione są w układzie tabelarycznym, nie uwzględnią podziału na grupy wiekowe, ale są skategoryzowane w odniesieniu do nabywanych przez dzieci umiejętności. Wykaz treści jest rozbudowany.

Powyższe zestawienie treści odnosi się do ogólnych zagadnień podstawy programowej i należy stwierdzić, że pod tym względem wszystkie programy spełniają wymóg zgodności treści z podstawą programową wychowania przedszkolnego. Różnice pomiędzy ujęciami podstawowych zagadnień geometrycznych pojawiają się, gdy szczegółowo przyjrzymy się treściom, na przykład dotyczącym stosunków przestrzennych, relacji czy figur geometrycznych. Kwestie te stały się przedmiotem dokładniejszych analiz, które prezentuję poniżej.

Geometryczne ujmowanie stosunków przestrzennych: położenie przedmiotów w przestrzeni, figury, relacje

W programie *Dziecięca matematyka* punktem wyjścia poznawania przestrzeni jest dobra orientacja dziecka w schemacie własnego ciała. Przestrzeń jest początkowo postrzegana i opisywana przez dziecko z własnego, indywidualnego punktu widzenia, a dziecko w ciągu kilku lat swojego dzieciństwa doskonali zdolność precyzowania go. Następnie, w miarę upływu lat i jak wskazują autorki – około 5. roku życia, dzieci poznają schemat drugiej osoby, uczą się przenosić własny schemat na drugą osobę i przyjmować jej punkt widzenia. W 6. roku życia dzieciom proponowane są zadnia polegające na oderwaniu się od egocentrycznej oceny przestrzeni i dzięki obiektywizacji stosunków przestrzennych możliwe staje się opanowanie umiejętności ustalania położenia przedmiotów jednych względem innych oraz wytyczanie kierunków od/do obranego przedmiotu. Kompetencje w zakresie orientacji przestrzennej w 6. roku życia dziecka są także ćwiczone w toku rozwiązywania zadań na kartce papieru.

E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska ujęły intuicje geometryczne jako blok programowy proponowany dzieciom starszym (pięcio- i sześcioletnim). W programie pojawiają się figury geometryczne, takie jak: kwadrat, prostokąt, trójkąt, koło oraz analogicznie kształty: kwadratowe, prostokątne itd. W zakresie relacji i przekształceń autorki proponują, by dzieci sześcioletnie poznały efekt lustrzanego odbicia, przesunięcia i obrotu.

Relacje przestrzenne i towarzyszące im zjawiska geometryczne występują w *Dziecięcej matematyce* głównie w bloku „Rytmy i rytmiczna organizacja czasu". Autorki proponują zadania polegające na spostrzeganiu, kontynuowaniu i tworzeniu rytmów w trzech rodzajach reprezentacji: wizualnej, słuchowej i ruchowej. Propozycje te są ważne i sprzyjają przygotowaniu dzieci do budowania trudnych pojęć matematycznych na etapie szkolnym. Warte podkreślenia są zagadnienia związane z symetrią, zadania polegające na dostrzeganiu rytmów w krótkich utworach literackich, tworzenie rytmów w działaniu plastycznym, poznawanie sztuki zdobniczej.

Z dostrzeganiem relacji między elementami związane jest mierzenie obiektów. E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska proponują takie zadania dla starszych przedszkolaków, będących w wieku pięciu i sześciu lat. Dzieci mają za zadanie mierzyć długość sal, parapetów, ławek, porównywać i układać przedmioty według długości. Podsumowując, w programie *Dziecięca matematyka* treści geometryczne dotyczące stosunków przestrzennych, figur i relacji są rozbudowane, a ich realizacja odbywa się w toku zróżnicowanych aktywności geometrycznych.

Geometria, jako nauka o mierzeniu ziemi, obejmuje w programie *Dobry start przedszkolaka* Moniki Rościszewskiej-Woźniak[82] poznawanie przestrzeni według kierunku pionowego, poziomego, prawa–lewa oraz świata wymiarów, czyli długości, szerokości i wysokości. Cztery podstawowe figury płaskie, będące przedmiotem poznania, to: trójkąt, prostokąt, kwadrat, koło.

W programie *Zanim będę uczniem,* autorstwa E. Tokarskiej i J. Kopały, edukacja geometryczna odnosi się, podobnie jak w poprzednich programach, do kształtowania orientacji przestrzennej, rozpoznawania kształtów geometrycznych, dokonywania czynności pomiarowych, dostrzegania powtarzalności układów i następstwa w czasie. W odniesieniu do kształtowania orientacji przestrzennej autorki podkreślają położenie przedmiotów w przestrzeni, zwracają uwagę na posługiwanie się określeniami związanymi z kierunkiem pionowym, poziomym, prawo–lewo. Uznają, że położenie przedmiotów w przestrzeni na ostatnim, przedszkolnym etapie rozwoju spostrzegania geometrycznego (etap III) będzie w pełni zrozumiane, gdy dzieci samodzielnie będą umiały określać położenie obiektów w odniesieniu do własnego ciała. Rozpatrując figury geometryczne, mamy w tym programie szersze ich spektrum. Poza figurami podstawowymi: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt, które występują w innych programach wychowania przedszkolnego, pojawiają się także figury przestrzenne, takie jak kula i sześcian.

Orientacja w kierunkach przestrzennych w programie *Ku dziecku* potraktowana jest szeroko, analogicznie do programu E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej oraz wymienionych programów wychowania przedszkolnego. W zakresie

[82] M. Rościszewska-Woźniak, *Dobry start przedszkolaka*.

mierzenia obiektów wyszczególniono sposoby i narzędzia miernicze, służące do pomiarów (np. stopa za stopą, kroki, sznurek, patyk, miarka krawiecka, stolarska, linijka, ekierka). Badanie figur geometrycznych nie ogranicza się do figur płaskich, dodatkowo pojawiają się wielokąty i elipsa oraz figury daleko wykraczające poza podstawę programową. Proponuje się wielozmysłowe i czynnościowe poznawanie brył, takich jak walec, stożek, ostrosłup, sześcian, prostopadłościan. Widoczny jest wpływ pedagogiki F. Fröbla i M. Montessori. W programie uwzględniono trudniejsze pojęcia matematyczne, takie jak ciężar, objętość i czas.

Eksponowane rodzaje aktywności i aktywizowanie dziecka

Autorki programu *Dziecięca matematyka* uważają, że edukacja matematyczna powinna być wtopiona w działania zmierzające do rozwoju wychowanków, akcentują wszystkie aktywności poznawcze i to, że aktywność dziecka ma mieć charakter geometryczny. W szczególności podkreślają obserwowanie, manipulowanie, badanie właściwości przedmiotów i relacji oraz słowne opisywanie przez dziecko własnych działań. Przykładami takich działań są: czynności badawcze, takie jak ustalanie na poziomie intuicji, czym jest kwadrat, trójkąt, prostokąt i koło, oglądanie, konstruowanie na geoplanie, składanie większych całości; mierzenie długości w różny sposób i za pomocą różnych narzędzi mierniczych (krokami, stopa za stopą, łokciami, dłonią i palcami, klockami, patykiem, sznurkiem, miarką krawiecką, stolarską, taśmą mierniczą i linijką szkolną).

Twórcza aktywność o charakterze geometrycznym przyjmuje w programie postać działalności plastyczno-konstrukcyjnej, polegającej na tworzeniu mozaik i parkietów, konstruowaniu modeli np. ogrodów z zastosowaniem geometrycznych efektów przemieszczenia; manipulacji z obserwacją przesunięć, obrotów figur geometrycznych, badaniem symetrii i doświadczaniem ornamentyki; nie pomija się także w programie aktywności ruchowej jako sposobu budowania wiedzy geometrycznej. E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska akcentują aktywność dziecka. W proponowanych treściach programowych czytelnik dostrzega nie tylko poznawczą wartość takich działań, nabywanie kompetencji geometrycznych, doskonalenie koncentracji uwagi i pamięci, ale także ich wartość praktyczną i promowaną przez autorki ideę stosowania wiedzy i umiejętności matematycznych w różnych sytuacjach życiowych. Podążając za instrukcjami autorek, nauczyciel może stwarzać badawcze środowisko i stawiać stymulujące rozwojowo zadania logiczno-geometryczne.

M. Rościszewska-Woźniak, autorka programu *Dobry start przedszkolaka,* jest zdania, że dziecko jest aktywne w procesie własnej edukacji, ale potrzebuje stwarzania możliwości i przestrzeni dla swojej aktywności. Jest to bardzo ważne założenie. W programie aktywność dzieci związana jest z poznawaniem, porów-

nywaniem, szeregowaniem, rozpoznawaniem i nazywaniem, mierzeniem. Twórczość matematyczna wiąże się z komponowaniem własnych układów z kształtów geometrycznych.

Dziecko będące na I etapie rozwojowym, wg autorek programu *Zanim będę uczniem,* powinny cechować takie same aktywności matematyczne, które wymienia M. Rościszewska-Woźniak: rozpoznawanie, wskazywanie przedmiotów, tworzenie kompozycji z figur bez konieczności ich nazywania. Na II etapie aktywności matematyczne dzieci są nakierowane na rozpoznawanie kształtu figur geometrycznych (za pomocą dostępnego materiału, drucików kreatywnych, sznurka), odwzorowywanie kształtów i układów przestrzennych (za pomocą klocków, mozaiki), układanie kompozycji w kształcie figur geometrycznych oraz tworzenie kompozycji z figur geometrycznych. Działania te są znacznie bardziej zróżnicowane niż w programie *Dobry start przedszkolaka.* Występuje tu więcej propozycji zróżnicowanych rodzajów aktywności matematycznych o charakterze odtwórczym i twórczym, w płaszczyźnie i przestrzeni. Dzieci pracują z bardziej urozmaiconym zestawem figur geometrycznych: kołem, kwadratem, trójkątem, kulą.

Na III etapie proponowane przez autorki aktywności matematyczne to rozpoznawanie, porównywanie, odwzorowywanie, czynienie spostrzeżeń (np. dotyczących symetrii: w naturze – skrzydła motyla i sytuacjach zadaniowych – wycinanki), wykazywanie się wiedzą (na temat powstawania odbicia lustrzanego). Poza figurami płaskimi i kulą pojawia się nowa bryła – sześcian. W zakresie czynności pomiarowych autorki uznały, że na I etapie dziecko tylko porównuje wielkości, na II – porównuje długości oraz podejmuje próby ich mierzenia (i jest tu określone, w jaki sposób: krokami i stopa za stopą), na III etapie – wie, na czym polega pomiar długości i zna sposoby mierzenia (np. krokami, stopa za stopą), dokonuje pomiarów, stosuje umiejętności w praktycznym działaniu, określa wysokość przez porządkowanie. Aktywność geometryczna jest w programie *Zanim będę uczniem* wiązana z aktywnością plastyczną, zabawową, konstrukcyjną, poznawaniem sztuki ludowej i przy okazji edukacji regionalnej.

Poznawanie geometrii w programie *Ku dziecku*[83] związane jest z codziennym życiem dziecka i jego aktywnością w sferach: intelektualnej, zabawowej, plastyczno-konstrukcyjnej i ruchowej. W treściach zaakcentowano projektowanie, planowanie, budowanie (podobnie jak u E. Claparède'a), pojawiają się też propozycje wykorzystania technik plastycznych rysunkowo-graficznych płaskich i przestrzennych (wycinanki, wyklejanki, wydzieranki), tworzenie makiet, działalność konstrukcyjna, obcowanie ze sztuką. Cele kształcenia i wychowania dotyczące edukacji geometrycznej to tworzenie warunków do rozwijania wyobraźni i myślenia przestrzennego przez rysowanie, malowanie, lepienie, konstruowanie;

83 B. Bilewicz-Kuźnia, T. Parczewska, *Entliczek pentliczek*...

zachęcanie do projektowania i wykonywania prostych urządzeń i obiektów, budowania modeli wizualnych (map, schematów, planów różnych miejsc: części pokoju, całego pomieszczenia, domu, przedszkola, ogrodu, placu zabaw); rozwijanie zdolności porównywania, porządkowania, przyporządkowywania w działaniu praktycznym[84]. W odniesieniu do sposobu budowania w umysłach dzieci pojęć geometrycznych w programie *Ku dziecku* pojawiają się określenia: wielozmysłowe i czynnościowe poznawanie, np. figur geometrycznych. Wskazuje to na waloryzowanie aktywności dziecka i uczenie się wszystkimi zmysłami.

Zgodność z podstawą programową i stopień rozszerzenia jej treści

Wszystkie programy zawierają treści zgodne z podstawą programową wychowania przedszkolnego (patrz rozdz. 2.4.1). Daleko wykraczający poza podstawę programową w zakresie treści geometrycznych jest program *Dziecięca matematyka* E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej. Treści programu są bogate i akcentują różne aktywności dzieci. Program stanowi rozbudowany zakres propozycji dla dzieci o zróżnicowanych potrzebach poznawczych. Nauczyciel może wykorzystać zawarte w nim propozycje do planowania pracy z dzieckiem o szczególnych potrzebach w zakresie inteligencji wizualno-przestrzennej.

M. Rościszewska-Woźniak w programie *Dobry start przedszkolaka* ujmuje treści ważne dla dalszej edukacji dziecka, wprowadza wykraczające poza podstawę programową zagadnienia związane z figurami geometrycznymi i trzecim wymiarem: wysokością. Program *Zanim będę uczniem* zawiera w odniesieniu do podstawy programowej rozszerzone treści geometryczne. Szczególnie odnosi się to do figur geometrycznych, które autorki proponują wprowadzać już na pierwszym etapie przedszkolnym, propozycji wielorakich porównań, dostrzegania relacji, w tym symetrii, mierzenia różnymi miarami oraz za pomocą różnych pomocy. W programie *Ku dziecku* również zaproponowano treści wykraczające poza podstawę programową. Dotyczy to mierzenia figur płaskich, przestrzennych i odkrywania zjawiska symetrii. Stanowi to propozycję dla dzieci zainteresowanych geometrią i uzdolnionych w zakresie myślenia przestrzennego. We wszystkich programach uwzględniono treści dotyczące relacji przestrzennych, które dzieci odkrywają w twórczych działach o charakterze manipulacyjnym, plastycznym, ruchowym i zintegrowanym.

---

[84] *Ibid.*, s. 12–14.

* * *

Cechą wspólną analizowanych programów jest to, że każdy jest zgodny z podstawą programową, a nawet wykracza poza jej treści, co jest istotne w pracy z dzieckiem zdolnym. W każdym programie uwzględniono zagadnienia dotyczące: orientacji w przestrzeni; symetrii pod postacią dostrzegania, kontynuowania i budowania regularności rytmicznych w działaniu aktywizującym większość zmysłów; mierzenie, wymiary (długość, szerokość, wysokość); figury geometryczne płaskie oraz przestrzenne, a także odkrywanie świata zjawisk geometrycznych w działaniach plastycznych i artystycznych.

W programach pojawiających się po roku 2000 daje się zauważyć wpływ metodyki E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i E. Zielińskiej. Treści programowe dotyczące orientacji przestrzennej opracowane są w rekomendowanych przez MEN programach bardzo podobnie i w szerokim zakresie. W zakresie uszczegóławiania zagadnień podstawy programowej obserwuje się w porównywanych programach zróżnicowanie. Najbardziej bogaty treściowo w odniesieniu do poznawania figur geometrycznych i brył jest program *Ku dziecku,* w zakresie aktywności, które służą poznawaniu figur – program *Zanim będę uczniem*; akcent na poznawanie świata i rzeczy w trzech wymiarach najwyraźniej jest położony w programie *Dobry start przedszkolaka*; najlepszych wzorców dotyczących zagadnień mierzenia, rytmów, czasu i symetrii dostarcza program *Dziecięca matematyka.*

Dużą wartością wszystkich charakteryzowanych programów jest humanistyczne i konstruktywistyczne podejście do dziecka, które akcentuje podmiotowość, wartość poznania indywidualnych dyspozycji, umiejętności i cech rozwojowych. Nie mniej ważne jest traktowanie efektów tej diagnozy jako drogowskazów w procesie organizowania dziecku środowiska działania i akcent na dobieranie przemyślanych treściowo i konstrukcyjnie, zindywidualizowanych zadań o stymulującym charakterze. Wszystkie autorki podkreślają znaczenie własnej, samodzielnej aktywności dziecka i podejmowanie czynności matematycznych, które są warunkiem skutecznego budowania wiedzy geometrycznej. W przedstawionych programach promuje się poznawanie geometrii w toku zróżnicowanych czynności, które wiążą się z życiem codziennym i najbliższym otoczeniem dziecka, podkreśla się rolę rozwiązywania problemów życia codziennego za pomocą rozumowań matematycznych. W programach dużą wagę przywiązuje się do stwarzania przez nauczyciela i gromadzenia przez dziecko indywidualnych doświadczeń i działań na poziomie intuicji.

2.4.2.2. Programy edukacji wczesnoszkolnej

W roku 2012 Ośrodek Rozwoju Edukacji (ORE) ogłosił konkurs na najlepszy i jednocześnie zgodny z podstawą programową program edukacji wczesnoszkolnej. I miejsce zdobył w nim program M. Kędry: *Smakowanie świata*, II nagrodę *ex aequo* programy: M. Skury i M. Lisickiego: *Mniej mówcie – Więcej działajcie* oraz M. Zatorskiej i A. Kopik: *Wielointeligentne odkrywanie świata*[85]. Programy te są rekomendowane przez MEN, opublikowane są na stronach internetowych ORE oraz na portalu edukacyjnym Scholaris[86].

Podobnie jak przy analizie porównawczej programów wychowania przedszkolnego punktem wyjścia było określenie kryteriów dokonywania zestawień porównawczych. Kryteria stanowią: drogi i warunki kształcenia geometrycznego oraz postulowane osiągnięcia ucznia w zakresie geometrii.

Drogi i warunki geometrycznego kształcenia w świetle teoretycznych podstaw programów

M. Kędra w programie *Smakowanie świata* przedstawia wychowawcom „Drogowskazy", stanowiące warunki pełnego rozwoju ucznia. Autorka podkreśla, że w procesie edukacyjnym należy tworzyć klimat sprzyjający przyjaznemu uczeniu się przez uwzględnianie indywidualnych i społecznych potrzeb ucznia, rozwijać jego wrażliwość intelektualną, emocjonalną i estetyczną, pozwolić mu na samodzielne odkrywanie i zdobywanie wiedzy.

Jako sposoby osiągania celów autorka wymienia między innymi odpowiednie organizowanie przestrzeni przez tworzenie kącików zainteresowań, na przykład wyróżnia kącik eksperymentalny. Edukację matematyczną proponuje prowadzić w wymiarze 5 godzin tygodniowo i określa, że w jej efekcie uczeń może osiągnąć przeciętny lub ponadprzeciętny poziom umiejętności. M. Kędra ilustruje to przykładem, podaje, że poziom wykraczający poza poziom podstawowy cechuje się tym, że uczeń rozumie, pamięta i stosuje zdobytą wiedzę, umiejętności, nabyte postawy w sytuacjach typowych i problemowych. W odniesieniu do matematyki są to następujące cechy:

> [...] uczeń umiejętnie posługuje się wszystkimi przyborami, narzędziami, materiałami i nowymi technikami, sam matematyzuje konkretne sytuacje, ilustruje podane zadania i obliczenia, dokonuje samodzielnie łatwych pomiarów, potrafi

[85] www.bip.ore.edu.pl/bip_download.php?id=450, data dostępu: 10.06.2012.
[86] Wszystkie nagrodzone programy znajdują się na stronach internetowych: www.ore.pl lub www.scholaris.pl, data dostępu: 24.11.2010.

> narysować podstawowe kształty figur geometrycznych: prostokąt, kwadrat, koło, prosta, odcinek itp., potrafi obliczyć obwody i boki takich figur[87].

Autorka waloryzuje aktywność jako najważniejszą drogą uczenia się dziecka, podkreśla samodzielne odkrywanie i zdobywanie wiedzy, uwrażliwia nauczyciela na indywidualizację i troskę o rozwój uczniów zdolnych, zaznacza społeczny kontekst uczenia się, w tym znaczenie relacji z nauczycielem i jego współbycie z uczniem. Mamy więc w programie postulaty skutecznej edukacji wczesnoszkolnej, która, zdaniem autorki programu, powinna być aktywna, zindywidualizowana, empiryczna, badawcza, odpowiadająca rozwojowi; prospołeczna, twórcza, zintegrowana, wymagająca. W tym kontekście program ma bardzo ambitne założenia. Autorka świadomie odwołuje się w nim do najważniejszych z punktu widzenia kształcenia geometrycznego teorii konstruktywistycznych, w tym koncepcji społecznego uczenia się L. S. Wygotskiego i konstruktywizmu społeczno-rozwojowego J. Piageta, które stawiają nauczycielom zadanie organizowania i pielęgnowania środowiska materialnego i społecznego jako znaczących czynników rozwoju ucznia. Słabszym punktem programu wydaje się to, że w programie nie dość mocno zaakcentowano zabawę, jako ważną – poza nauką – drogę uczenia się dzieci w wieku wczesnoszkolnym.

W programie nauczania dla edukacji wczesnoszkolnej pt. *Mniej mówcie – Więcej działajcie* autorstwa M. Skury i M. Lisickiego, podobnie jak u M. Kędry, akcentuje się aktywność ucznia i jego działanie. Podejście programowe cechuje odwołanie się do nowoczesnych teorii uczenia się–nauczania w ujęciu J. Brunera i J. Piageta. Autorzy programu M. Skura i M. Lisicki uznają konstruktywizm za podstawową teorię kształtowania pojęć geometrycznych i podkreślają, że dziecko, budując wiedzę logiczno-matematyczną, funkcjonuje na trzech poziomach reprezentacji: enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej. Program promuje pracę metodami aktywnymi. Tytułowe działanie rozumiane jest jako aktywność ucznia, manipulowanie różnorodnymi dostępnymi przedmiotami, współpraca i współdziałanie, zadawanie pytań i odpowiadanie na nie, błądzenie. Autorzy podkreślają, że działanie może być tylko osobiste. Jest to zgodne ze współczesnymi celami kształcenia geometrycznego i postulatem rozwijania u wychowanka aktywności geometrycznej, w toku której zarówno kształty, jak i przestrzeń stają się obiektami obserwacji, myślenia i twórczego działania.

M. Zatorska i A. Kopik – autorki programu edukacji wczesnoszkolnej pt. *Wielointeligentne odkrywanie świata*, oparły koncepcję kształcenia wczesnoszkolnego na kilku osnowach. Pierwszą stanowi teoria inteligencji wielorakich H. Gardnera, drugą jest diagnoza, kolejnymi indywidualizacja, dalej tworzenie w miejscach

[87] www.ore.pl, data dostępu 01.07.2012.

dziecięcej zabawy i nauki inspirującego środowiska edukacyjnego i dialog. Autorki uznają, że każdy człowiek posiada wszystkie typy inteligencji, które wzajemnie na siebie oddziałują, przenikają się i uzupełniają. Każde dziecko jest osobą, która dysponuje wieloma różnymi mocnymi stronami, a poznanie tych stron jest szansą na całościowe wspieranie jego rozwoju. W programie pojawia się idea, że na ucznia należy patrzeć całościowo, rozwijać jego zdolności specjalne i wspomagać słabsze strony. Charakteryzując dzieci z dominującą inteligencją matematyczno-logiczną, autorki piszą, że dzieci te są:

> [...] konkretne i dociekliwe, umiejętnie szeregują, wnioskują, klasyfikują, zgodnie z jakąś zasadą lub cechą; dostrzegają związki przyczynowo-skutkowe, myślą logicznie. Korzystają z precyzyjnych instrukcji, lubią badać oraz zbierać różne informacje, zadają wiele pytań dotyczących otaczającego świata; są dociekliwe, kreatywnie rozwiązują problemy. Poznają świat poprzez eksperymentowanie i doświadczanie, a nie poprzez opowieści. Chętnie bawią się w gry logiczne, rozwiązują zagadki, łamigłówki. Lubią świat liczb, przeliczają różne przedmioty, rozumieją znaczenie symboli[88].

W programie widoczna jest koncepcja konstruktywizmu poznawczego i społecznego. Autorki zwracają uwagę na poznawcze i środowiskowe uwarunkowania indywidualnego rozwoju. Jako znaczące warunki rozwoju, poza różnicami indywidualnymi w zakresie typów inteligencji, podkreślają uwarunkowania społeczne i tworzenie przez szkołę inspirującego środowiska edukacyjnego.

Postulowane osiągnięcia uczniów w zakresie geometrii

Postępowanie dydaktyczne powinno być celowe i systematyczne. Zgodnie z tą tezą w każdym z porównywanych programów nauczania autorzy precyzują cele etapowe. W programie *Smakowanie świata* M. Kędry[89] znajdują się dwie umiejętności ogólne odnoszące się do matematyki i geometrii: uczeń opanował umiejętności posługiwania się metodami matematycznymi w życiu codziennym, uczeń dokonuje praktycznych obliczeń dotyczących długości i obwodu figur geometrycznych. W celach tych, mimo dużego stopnia ogólności, dostrzega się równowagę pomiędzy aspektem arytmetycznym a aspektem geometrycznym. Autorka uszczegóławia je pod postacią treści i umiejętności, co przedstawiają tabele zamieszczone poniżej.

Treści programowe dotyczące edukacji geometrycznej w programie *Smakowanie świata* odnoszą się do trzech zakresów: czynności umysłowych istotnych dla uczenia się matematyki, pomiaru i figur geometrycznych. W zestawieniu do-

---

88 www. scholaris.pl/frontnd, data dostępu 01.07.2012.

89 Autorka ta została nagrodzona przez MEN w 2010 roku za program *Nowoczesna edukacja.*

Tab. 13. Treści geometryczne w programie edukacji wczesnoszkolnej *Smakowanie świata*

Zakres	Klasa I	Klasa II	Klasa III
W zakresie czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki	– określanie położenia przedmiotów (na, pod, obok, za, przed, wyżej, niżej, na górze, na dole) w przestrzeni i na kartce papieru – klasyfikacja i porządkowanie obiektów – wyprowadzanie kierunków od siebie i innych osób		
W zakresie pomiaru	– długości	– długości	– długości
Figury geometryczne, symetrie	– dostrzeganie regularności na rysunku	– określanie położenia – rysowanie – obwody	– figury geometryczne, symetrie

Źródło: M. Kędra, *Smakowanie świata.*

strzega się, że treści związane z położeniem przedmiotów w przestrzeni pojawiają się tylko w klasie I. Widzimy tu zagadnienia związane z określaniem położenia przedmiotów w przestrzeni i na kartce, klasyfikowaniem i porządkowaniem oraz percepcją regularności. W kolejnych klasach, jak pokazuje zestawienie opracowane na podstawie programu, autorka nie wyszczególnia tych czynności.

Tab. 14. Umiejętności związane z geometrią w programie *Smakowanie świata*

Zakres	Klasa I	Klasa II	Klasa III
1	2	3	4
W zakresie czynności umysłowych ważnych dla uczenia się matematyki	– określa położenie obiektów względem branego obiektu – orientuje się na kartce papieru, aby odnajdować informacje (np. w prawym górnym rogu) – klasyfikuje obiekty, tworzy kolekcje – układa obiekty (np. patyczki) w serie rosnące i malejące, numeruje je – wybiera obiekt w serii, wskazuje następne i poprzednie – ustala równoliczność mimo obserwowanych zmian w układzie elementów porównywanych zbiorów – wyprowadza kierunki od siebie (po prawej stronie, na lewo od), orientuje się na kartce papieru, aby odnajdywać informacje i rysować strzałki we właściwym kierunku – kontynuuje regularny wzór, np. szlaczek		

1	2	3	4
W zakresie pomiaru	– mierzy długość, posługując się linijką, porównuje długości obiektów	– dokonuje obliczeń użytecznych w życiu związanych z długością – posługuje się oznaczeniami i skrótami jednostek długości – oblicza długość linii łamanych	– dokonuje obliczeń użytecznych w życiu związanych z długością – posługuje się oznaczeniami i skrótami jednostek długości – mierzy i zapisuje wyniki pomiarów, stosuje jednostki miary (metr, centymetr, milimetr), używa pojęcia *kilometr* w sytuacjach życiowych – rysuje odcinki o podanej długości
Figury geometryczne, symetrie	– dostrzega symetrię, np. w rysunku motyla – zauważa, że jedna figura jest powiększeniem lub pomniejszeniem drugiej	– rysuje odcinki o podanej długości – rozpoznaje i nazywa figury geometryczne: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt, – rozpoznaje i nazywa figury nietypowe, zachodzące na siebie – rysuje figury symetryczne – rysuje w powiększeniu i pomniejszeniu oraz zachowuje regularność w prostych motywach	– rozpoznaje i nazywa figury geometryczne: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt, – rozpoznaje i nazywa figury nietypowe, zachodzące na siebie – rysuje figury symetryczne – rysuje w powiększeniu i pomniejszeniu oraz zachowuje regularność w prostych motywach

Źródło: M. Kędra, *Smakowanie świata.*

Geometria, jak już zostało określone wcześniej, jest nauką o mierzeniu ziemi, także towarzyszy jej pomiar. W tym programie pomiar dotyczy tylko jednego wymiaru – długości.

Trzeci ważny zakres – figury geometryczne – jest przedstawiony w programie hasłowo. Autorka proponuje, by uczniowie w klasie I dostrzegali regularności na rysunku, w klasie II ujmowali przestrzenne stosunki świata rzeczywistego, określali położenie przedmiotów w przestrzeni i posługiwali się językiem matematyki, wykorzystując symbole i elementy niewerbalne, takie jak rysowanie, a w klasie III proponuje symetrie. Realizując wymienione treści, uczniowie mają nabyć określone umiejętności, które przedstawiam w tab. 14.

Umiejętności geometryczne ucznia klasy I to porównywanie i porządkowanie, czynienie spostrzeżeń, klasyfikowanie, układanie obiektów w serie malejące i rosnące, orientacja w przestrzeni. Treści te pojawiły się już w charakteryzowa-

nych programach wychowania przedszkolnego. Autorka zaproponowała je klasie I i myślę, że warto te działania kontynuować w klasie II i III.

Drugą ważną grupą umiejętności geometrycznych jest dla M. Kędry skuteczne dokonywanie pomiarów. Uczniowie klasy I powinni więc umieć mierzyć długości, a w klasie III posługiwać się jednostkami długości. W programie nie pojawiają się wskazówki co do użycia narzędzi, środków i sposobów wspomagających ten pomiar.

Jeśli chodzi o symetrię, autorka nie wyszczególnia, jakie kształty geometryczne mogą być przedmiotem badań ucznia klasy I, ale w wykazie umiejętności ucznia klasy II odnajdujemy cztery figury podstawowe. Dostrzega się, że program akcentuje umiejętność posługiwania się językiem matematyki z wykorzystaniem słów, symboli i elementów niewerbalnych, np. rysunków, schematów. Ciekawe jest zaakcentowanie przez M. Kędrę rozpoznawania i nazywania figur nietypowych, szczególnie jako umiejętności ucznia kończącego klasę III.

W programie *Mniej mówcie – Więcej działajcie,* autorstwa M. Skury i M. Lisickiego, można odnaleźć cele szczegółowe dotyczące wspomagania dziecka w rozwoju intelektualnym. Spośród nich dla skutecznej edukacji geometrycznej ważne będą np.:

- rozwijanie umiejętności podejmowania odpowiednich działań w celu znalezienia odpowiedzi na pytanie;
- obserwowanie;
- eksperymentowanie;
- poszukiwanie informacji w tekstach, tabelach;
- rozwijanie myślenia krytycznego i twórczego;
- rozwijanie umiejętności klasyfikowania;
- kształcenie posługiwania się pojęciami;
- rozwijanie zdolności dostrzegania, kontynuowania oraz przekładania regularności z jednej reprezentacji na inną, a także określania zasad, jak powstała dana regularność;
- rozwijanie umiejętności porządkowania obiektów, tak by utworzyć konsekwentną serię;
- rozwijanie umiejętności orientowania się w przestrzeni, wyobraźni przestrzennej;
- szukanie i dostrzeganie analogii, rozwijanie myślenia przyczynowo-skutkowego;
- wnioskowanie o zmianach,
- operacyjne rozumowanie na poziomie konkretnym;
- kształtowanie umiejętności matematyzowania,
- przekładanie sytuacji życiowych na język matematyki,

– praktyczne wykorzystanie zdobytej wiedzy i umiejętności rozwiązywania zadań z matematyki;
– kształtowanie umiejętności dokonywania pomiarów i zapisywania wyników tych pomiarów; kształtowanie intuicji geometrycznych.

To rozbudowany zestaw celów. W ich doborze i formułowaniu widoczny jest wpływ osiągnięć dydaktyków matematyki i konstruktywistów.

W zakresie całej edukacji matematycznej M. Skura oraz M. Lisicki wyróżniają 26 obszarów treściowych. Z geometrią związane są: orientacja w przestrzeni, klasyfikacja, wnioskowanie o zmianach, szeregowanie, myślenie przez analogię, myślenie przyczynowo-skutkowe, regularności, symetria, figury płaskie geometryczne, bryły geometryczne, długość. Analiza programu wykazuje, że treści programowe są bardzo rozbudowane. I właśnie z tego względu, z uwagi na rozbudowany charakter treści, poddam analizie tylko wybrane trzy obszary edukacyjne związane w tym programie z geometrią. Są to figury geometryczne, bryły oraz długość. Prześledzę te zagadnienia w wykazie treści programowych przeznaczonych dla klasy I, II i III. Wybrane treści przedstawiam w tab. 15.

Tab. 15. Umiejętności związane z geometrią w programie *Mniej mówcie – Więcej działajcie*

Obszar	Klasa I	Klasa II	Klasa III
Figury płaskie	Figury płaskie geometryczne – koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt *Budujemy nowe pojęcia:* – rozpoznawanie i nazywanie kształtu koła, prostokąta, kwadratu, trójkąta w otoczeniu dziecka i na rysunkach – konstruowanie prostokątów i trójkątów z patyczków o różnej długości – obrysowywanie szablonów kół, trójkątów, prostokątów i kwadratów – projektowanie szlaczków, rozet, ornamentów – powiększanie i pomniejszanie figur geometrycznych – porównywanie długości boków prostokątów przez bezpośrednie przyłożenie do siebie	Figury płaskie geometryczne – koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt *Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – rozpoznawanie i nazywanie kształtu koła, prostokąta, kwadratu, trójkąta w otoczeniu dziecka i na rysunkach (również nietypowych, położonych w różny sposób oraz w sytuacji gdy figury zachodzą na siebie) – konstruowanie prostokątów i trójkątów z patyczków o różnej długości – rysowanie, wycinanie prostokątów, kwadratów i trójkątów po śladzie – kontynuowanie regularności w prostych motywach (np. szlaczkach, rozetach, ornamentach) – projektowanie i kontynuowanie regularnych sekwencji	Figury płaskie geometryczne – koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt *Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – rysowanie, wycinanie prostokątów, kwadratów i trójkątów po śladzie i bez śladu; – rysowanie prostokątów i kwadratów na pokratkowanym papierze (o boku 0,5 cm) – kontynuowanie regularności w prostych motywach (np. szlaczkach, rozetach, ornamentach) – porównywanie długości boków prostokątów przez mierzenie ich linijką Budujemy nowe pojęcia: – projektowanie figur złożonych z odcinków – stosowanie w zadaniach wiedzy o tym, że kwadrat jest szczególnym rodzajem prostokąta

Tab. 15, cd.

Figury płaskie	Figury płaskie geometryczne – odcinek *Budujemy nowe pojęcia:* – rozpoznawanie i nazywanie odcinków – mierzenie długości odcinków (do 20 cm) – rysowanie odcinków o danej długości w centymetrach (w zakresie 20 cm) – porównywanie długości odcinków	– powiększanie i pomniejszanie figur geometrycznych (kół, kwadratów) – porównywanie długości boków prostokątów przez bezpośrednie przyłożenie do siebie oraz mierzenie za pomocą linijki *Budujemy nowe pojęcia:* – rysowanie, wycinanie prostokątów, kwadratów i trójkątów bez śladu – rysowanie prostokątów i kwadratów na pokratkowanym papierze (o boku 1 cm); – rysowanie figur w pomniejszeniu i powiększeniu – mierzenie linijką boków prostokątów oraz porównywanie długości boków prostokątów Figury płaskie geometryczne – odcinek, linia *Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – rozpoznawanie, mierzenie i rysowanie odcinków – rysowanie odcinków o podanej długości w centymetrach – porównywanie długości odcinków *Budujemy nowe pojęcia:* – wskazywanie linii	– liczenie boków i kątów w wielokątach – obliczanie obwodów trójkątów, kwadratów i prostokątów Figury płaskie geometryczne – koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt *Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – mierzenie i rysowanie odcinków o długości wyrażonej w centymetrach – porównywanie długości odcinków *Budujemy nowe pojęcia:* – mierzenie i rysowanie odcinków o długości wyrażonej w milimetrach, porównywanie ich długości – rysowanie za pomocą linijki różnych odcinków na papierze kratkowanym – obliczanie długości łamanych; – obserwowanie i wytyczanie linii prostych, krzywych i łamanych – wskazywanie odcinków równoległych
Bryły geometryczne	*Budujemy nowe pojęcia:* – rozpoznawanie i nazywanie w otoczeniu brył: kuli, walca, sześcianu – lepienie kul z plasteliny (modeliny, gliny; wskazywanie kul mniejszych i większych)	*Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – rozpoznawanie i nazywanie w otoczeniu brył: kuli, walca, sześcianu *Budujemy nowe pojęcia:* – rozpoznawanie i nazywanie w otoczeniu prostopadłościanu – wskazywanie na przedmiotach w kształcie sześcianu ścian w kształcie kwadratu, liczenie ich – wskazywanie na przedmiotach w kształcie prostopadłościanu ścian w kształcie prostokąta i kwadratu, liczenie ich	Figury płaskie geometryczne – koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt *Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – rozpoznawanie i nazywanie w otoczeniu brył: kuli, walca, sześcianu, prostopadłościanu – wskazywanie na przedmiotach w kształcie walca ścian w kształcie koła – wskazywanie na przedmiotach w kształcie sześcianu ścian w kształcie kwadratu, liczenie ich – wskazywanie na przedmiotach w kształcie prostopadłościanu ścian w kształcie prostokąta i kwadratu, liczenie ich

Długość	*Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – mierzenie długości (odległości) krokami, stopami, patyczkami, innymi przedmiotami, wymyślenie wielu jednostek pomiaru – porównywanie obiektów pod względem długości, wysokości, szerokości *Budujemy nowe pojęcia:* – wnioskowanie o stałości długości obiektu pomimo obserwowalnych zmian w jego kształcie – mierzenie długości, szerokości, wysokości tego samego przedmiotu różnymi miarkami; dobieranie miarki do mierzonego obiektu – poznawanie i stosowanie pojęcia *1 centymetr* – mierzenie długości za pomocą linijki; zapisywanie wyników pomiaru; – stosowanie skrótu cm; – porównywanie długości obiektów mierzonych za pomocą linijki; wskazywanie obiektów krótszych, dłuższych, o takiej samej długości	*Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – poznawanie i stosowanie pojęcia *1 centymetr* – mierzenie długości, szerokości, wysokości oraz odległości za pomocą linijki; wskazywanie obiektów krótszych, dłuższych, o takiej samej długości, czy szerokości lub wysokości *Budujemy nowe pojęcia:* – poznawanie i stosowanie pojęcia *metr*; – mierzenie długości, szerokości, wysokości za pomocą miarki krawieckiej, zapisywanie wyników pomiaru; – stosowanie skrótu m – porównywanie długości, szerokości, wysokości oraz odległości mierzonych obiektów za pomocą miarki krawieckiej; wskazywanie obiektów krótszych, dłuższych, o takiej samej długości, szerokości, lub wysokości – stosowanie w zapisach dotyczących porównywania długości, szerokości, wysokości oraz odległości znaków: <, >, =	Figury płaskie geometryczne – koło, prostokąt, kwadrat, trójkąt *Powtarzamy, pogłębiamy, rozszerzamy:* – stosowanie pojęcia *1 centymetr* – mierzenie długości, szerokości, wysokości oraz odległości za pomocą linijki i miarki krawieckiej, wskazywanie obiektów krótszych, dłuższych, o takiej samej długości czy szerokości lub wysokości – stosowanie w zapisach dotyczących porównywania długości, szerokości, wysokości oraz odległości znaków: <, >, = *Budujemy nowe pojęcia:* – poznawanie i stosowanie pojęć: *1 milimetr*, *1 kilometr* – stosowanie w praktyce skrótu mm, km

Źródło: M. Skura, M. Lisicki, *Mniej mówcie – Więcej działajcie.*

Zestawienie ukazuje, że zbiór treści jest obszerny i poznawczo wartościowy. Z punktu widzenia zagadnień geometrycznych to program bogaty i można go polecać współczesnym nauczycielom. Treści programowe wykraczają poza podstawę programową, ale nie stanowią powtórzenia zagadnień realizowanych na poziomie przedszkolnym, wydają się inspirujące dla dzieci, a nauczycielowi dostarczają konkretnych wskazówek do rzeczywistych, a nie pozorowanych działań dziecka. Przykładowo zagadnienia dotyczące figur geometrycznych płaskich i przestrzennych są w kolejnych klasach powtarzane, pogłębiane i rozszerzane. Podsumowując: Zagadnienia geometryczne potraktowane są z należytym szacunkiem i wieloaspektowo. Aktywność dziecka jest wielopłaszczyznowa i zróżnicowana. M. Skura i M. Lisicki akcentują poznawanie matematyki w działaniu, dlatego mamy tu bardzo dużo przykładów działań badawczych. Przykładowo autorzy proponują

porównywanie przez rozpoznawanie, poszukiwanie, mierzenie, posługiwanie się pomocami i przyrządami mierniczymi, stosowanie zapisów i symboli.

W programie *Wielointeligentne odkrywanie świata* M. Zatorska i A. Kopik także precyzują cele, które można odnieść do kształcenia geometrycznego. Są wśród nich: tworzenie możliwości zdobywania przez ucznia różnorodnych doświadczeń, stanowiących podstawę systematycznego zdobywania wiedzy oraz umiejętności matematycznych na dalszych etapach edukacyjnych; rozwijanie intuicyjnego kształtowania pojęć geometrycznych; kształcenie umiejętności posługiwania się metodami oraz sprawnościami matematycznymi w życiu codziennym; rozwijanie umiejętności matematyzacji; kształtowanie aktywnej i twórczej postawy wobec problemów matematycznych w sytuacjach bliskich uczniom oraz posługiwanie się prostymi strategiami w toku ich rozwiązywania. Postawione cele pozwalają ukierunkować działania nauczycieli i czynić edukację geometryczną bardziej skuteczną.

Szczegółowe treści, ujęte w formie tabelarycznej, przedstawiają osiągnięcia ucznia po klasie I oraz po ukończeniu klasy III i prezentuję je poniżej.

Zestawienie treści programowych ujętych w programie *Wielointeligentne odkrywanie świata* (tab. 16) ukazuje, że treści geometryczne są zgodne z podstawą programową i celami kształcenia geometrycznego. Można jednak odnieść wrażenie, że w zakresie stosunków przestrzennych i dostrzegania cech wielkościowych przedmiotów treści klasy I są powtórzeniem zagadnień realizowanych na etapie wychowania przedszkolnego, a zagadnienie położenia przedmiotów w przestrzeni ujęte w III klasie stanowi utrwalenie znanych zagadnień. Należy pozytywnie ocenić, że proponowane przez autorki treści dotyczące figur geometrycznych akcentują takie czynności, jak rozpoznawanie, rysowanie schematów, porównywanie, konstruowanie. Dla budowania wiedzy matematycznej to ważne działania. W tabeli widzimy także, że w klasie III pojawiają się bryły, ale nie wiemy jakie, mówi się o relacjach prostopadłości i równoległości. Autorki trafnie akcentują mierzenie i posługiwanie się zapisem wyników pomiaru.

* * *

Praktyka edukacyjna pokazuje, że ilość i zakres budowanych w umysłach dzieci pojęć geometrycznych wyznacza przede wszystkim podstawa programowa[90]. Dzieje się tak szczególnie wtedy, gdy nauczyciele skrupulatnie trzymają się

---

90 Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z dnia 15 stycznia 2009 r.).

Tab. 16. Treści geometryczne w programie *Wielointeligentne odkrywanie świata*

Treści kształcenia		Klasa I	Klasa III
Czynności umysłowe ważne dla uczenia się matematyki	stosunki przestrzenne	– wyprowadza kierunki od siebie i od innych osób – określa położenie obiektów względem obranego obiektu na płaszczyźnie, w przestrzeni – potrafi odnaleźć informację na kartce papieru (np. w lewym górnym rogu) – dostrzega symetrię (w rysunku motyla) – zauważa, że jedna figura jest powiększeniem lub pomniejszeniem drugiej – kontynuuje regularny wzór (np. szlaczek)	– określa położenie przedmiotów w przestrzeni oraz na płaszczyźnie; kierunki ruchu z użyciem określeń: przed, za, z tyłu, z przodu, z boku, przy, między, wysoko, wyżej, najwyżej, nisko, niżej, najniżej, dalej, bliżej, nad, pod, na, wewnątrz, na zewnątrz, na brzegu, na lewo, na prawo, prosto, do góry, do tyłu – rysuje drugą połowę figury symetrycznej – rysuje figury w powiększeniu lub pomniejszeniu – kontynuuje regularność w motywach prostych (mozaiki, szlaczki)
	cechy wielkościowe	– porządkuje przedmioty według podanej cechy – porównuje przedmioty zgodnie z wyróżnioną cechą – układa obiekt w serie malejące i rosnące, numeruje je, wybiera jeden obiekt w serii, określa poprzednie i następne	– porównuje przedmioty pod względem wyróżnionej cechy wielkościowej: długości, szerokości, wysokości, masy – porządkuje przedmioty, np. malejąco, rosnąco
	figury geometryczne	– rozpoznaje kształty podstawowych figur geometrycznych w otoczeniu i na obrazku – rysuje różne figury geometryczne za pomocą szablonu (np. obrysowuje klocek), układa z patyczków – porównuje długości boków prostokątów, przykładając je do siebie	– rozpoznaje i nazywa: koło, kwadrat, prostokąt, trójkąt (również nietypowe, położone w różny sposób oraz w sytuacji, gdy zachodzą na siebie) – rysuje odcinki prostopadle i równolegle w otoczeniu, na modelach figur płaskich i brył z wykorzystaniem innych środków dydaktycznych
	pomiar długości	– mierzy długość, posługując się różnymi miarami, w tym linijką – porównuje długości obiektów	– mierzy, zapisuje wynik pomiaru długości, szerokości, wysokości przedmiotów, odległości – posługuje się jednostkami: metr, centymetr, milimetr, wykonuje proste obliczenia dotyczące tych miar, bez zamiany jednostek – używa pojęcia *kilometr* w sytuacjach życiowych, bez zamiany jednostek w formalnych obliczeniach

Źródło: M. Zatorska, A. Kopik, *Wielointeligentne odkrywanie świata.*

jej zapisów lub gdy wybierają program w niewielkim stopniu wychodzący poza jej zakres. Zgodnie z tym dokumentem – na etapie wczesnej edukacji – do 10. roku życia dziecko ma za zadanie poznawać zagadnienia związane z położeniem przedmiotów w przestrzeni, cechami figur geometrycznych, pojęciem zbioru, liczby, masy, objętości, długości, ciężaru, czasu, zjawisko symetrii, tworzyć dekoracje i ornamenty. Podstawa programowa i wybrany przez nauczyciela program nie mogą być jednak, i zazwyczaj nie są – bo przeczyłoby to teorii konstruktywizmu – jedynym źródłem wiedzy geometrycznej ucznia. Jest nim także dom rodzinny, środowisko społeczne i kulturowe, różnice indywidualne i własna aktywność dziecka. Dlatego przed przystąpieniem do pracy oraz w toku realizacji określonych przez podstawę zadań nauczyciel musi mieć świadomość, że dzieci różnią się między sobą poziomem gotowości do uczenia się nowych zagadnień, mają zróżnicowany zasób doświadczeń, który jest uzależniony od jakości i ilości wcześniejszych oddziaływań, kultury ich życia czy indywidualnych dyspozycji poznawczych i emocjonalno-społecznych. W działaniach edukacyjnych wychowawca powinien brać pod uwagę indywidualne zasoby dziecka, powinien wspierać wychowanka w budowaniu własnej wiedzy w procesie rozumienia świata matematyki. Spośród wielu propozycji programowych nauczyciel powinien wybrać dobry, bogaty treściowo program, będący dla niego inspiracją do twórczych działań. Może taki program również opracować sam.

Wybierając program, warto, by nauczyciel wykazał się krytyczną refleksją, gdyż, jak wykazuje powyższa analiza, propozycje autorskie są zróżnicowane. Pewne treści są w programach rozbudowane, inne nie dość wyeksponowane, zdarzają się powtórzenia treści realizowanych na etapie wychowania przedszkolnego i czasem nie docenia się możliwości rozwojowych dzieci w zakresie geometrii. Warto wzbogacać treści edukacyjne zagadnieniami związanymi z bryłami, jak miało to miejsce w programach z lat 80. XX wieku i ma miejsce we współczesnym programie *Mniej mówcie – Więcej działajcie*. Można także w toku działalności plastyczno-konstrukcyjnej, w toku zabaw dydaktycznych poznawać właściwości przestrzeni, tworzyć modele brył obrotowych, wielościanów, poznawać figury płaskie, np. wielokąty, elipsy, wycinki kół, rozpoznawać symetrie w otaczającym świecie i sztuce ornamentu. Ważne działania to także dekorowanie powierzchni i konstruowanie ich, wyznaczanie osi symetrii w różnych kompozycjach, twórcze manipulowanie modelami figur płaskich i przestrzennych, mierzenie długości rozmaitymi sposobami i za pomocą różnych narzędzi mierniczych. Do takich działań powinien zachęcać każdy inspirujący i twórczy dorosły.

3. PSYCHOPEDAGOGICZNE PODSTAWY KSZTAŁTOWANIA SIĘ INTUICJI I POJĘĆ GEOMETRYCZNYCH W OKRESIE DZIECIŃSTWA

Rozwój jednostki w zakresie budowania indywidualnego systemu wiedzy geometrycznej zależy od wielu czynników. Osiągnięcia współczesnej psychologii wskazują na wagę zadatków genetycznych, znaczenie środowiska fizycznego i społecznego, wychowanie i aktywność własną. Poszukując uwarunkowań tego procesu, odwołuję się do teorii i koncepcji procesu tworzenia się pojęć w okresie dzieciństwa. Z uwagi na przedmiot badania rozważania rozpoczynam od analizy samego terminu *pojęcie,* koncentrując się na pojęciach matematycznych, rozumieniu ich istoty, treści i zakresu. Następnie sięgam do kluczowych teorii psychopedagogicznych, wyjaśniających istotę procesu nabywania kompetencji matematycznych w toku dojrzewania dziecka. Teorie te mieszą się w nurcie konstruktywizmu i w jego dwóch głównych podejściach: poznawczym i społecznym. Poznawcze podejście koncentruje się na tym, jak w umyśle uczącego się powstaje własna wiedza, jak zachowanie i działanie jednostki wpływa na konstruowanie i reprezentowanie wiedzy. Konstruktywizm społeczny podkreśla rolę środowiska społeczno-kulturowego i w tym kontekście interpretuje procesy rozumienia przez jednostkę otaczającego ją świata i pojmowania rzeczywistości; akcentuje, że świat może być rozumiany na wiele różnych sposobów, a proces ten jest zależny od aktualnej cywilizacji i kultury. Psychologowie XX wieku L. S. Wygotski, J. Piaget, J. Bruner jako reprezentanci teorii poznawczo-rozwojowej akcentują ze zróżnicowaną siłą wymiar poznawczy bądź społeczny. Wielu późniejszych badaczy łączy teorie tych naukowców, traktując na równi wagę tzw. wewnętrznej perspektywy (rozwój osobowy jednostki, niezależny od środowiska i warunków

zewnętrznych) oraz zewnętrzne warunki tworzenia wiedzy matematycznej[1]. Pojawiają się też nowe teorie wyjaśniające rozumienie i budowanie przez dzieci wiedzy, w tym matematycznej i geometrycznej, dlatego warto ukazać najnowsze koncepcje budowania pojęć geometrycznych (P. Vopěnki i M. Hejný'ego, P. van Hielego) i wybrane uwarunkowania skuteczności tego procesu. Z punktu widzenia opisanych teorii w ostatnim podrozdziale dowodzę znaczenia matematyzowania jako głównej aktywności związanej z tworzeniem pojęć geometrycznych.

3.1. ISTOTA POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Termin *pojęcie* jest głęboko zakorzeniony zarówno w języku potocznym, jak i w obszarze wielu nauk. Przyjmuje różne znaczenia i ma odmienny zakres treści, zależny od dyscypliny, do której się odnosi, dlatego też w niniejszym podrozdziale przedstawiam klasyfikacje pojęć według różnych kryteriów, a następnie charakteryzuję istotę, strukturę i cechy pojęcia matematycznego.

Pojęcie inaczej pojmuje się w kategoriach potocznych, a inaczej w kategoriach naukowych. W przypadku tych ostatnich mamy do czynienia z różnego rodzaju pojęciami, np. matematycznymi, przyrodniczymi i ich odmiennym pojmowaniem.

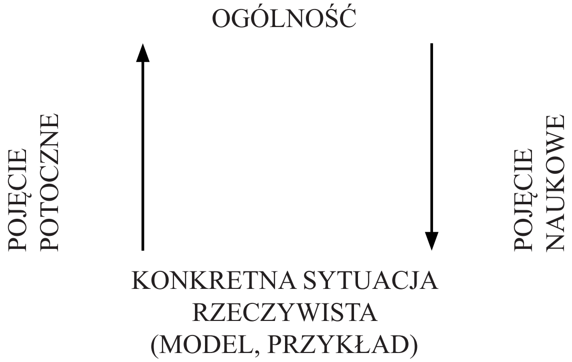
L. Wygotski był pierwszym badaczem który rozróżnił *pojęcia potoczne* (naturalne, spontaniczne) oraz *pojęcia naukowe* (systematyczne). Pojęcia naturalne, jego zdaniem, rozwijają się w rezultacie aktywności podmiotu i zaistnienia dwóch grup czynników: materiału realnego oraz słownego. Kontakty z realnymi przedmiotami prowadzą do eksplorowania i uruchamiania procesu abstrahowania, a następnie do rodzenia się pojęć w działaniu. Z drugiej strony, kontakt dziecka ze słowami określającymi obiekt w różnych kontekstach i sytuacjach pozwala opanować jego znaczenie, a słowo jako narzędzie staje się nazwą powstającego pojęcia. L. Wygotski ustalił, że pojęcia spontaniczne rozwijają się od form prymitywnych, poprzez tzw. *synkrety, kompleksy* i *pseudopojęcia,* które to formy nazwał *równoważnikami pojęć*, aż do właściwych pojęć naturalnych. Warto przy tym zauważyć, że to rozróżnienie ma aspekt praktyczny. Przykładowo w procesie edukacyjnym może zaistnieć taka sytuacja, że dziecko nie operuje jeszcze nazwą, a równoważnikiem pojęcia – kompleksem. Jego rozumienie pojęcia ma inny charakter niż rozumienie dorosłego i choć zarówno nauczyciel, jak i wychowanek

---

[1] E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 21.

mogą zgodnie używać tych samych słów, to struktura i cechy pojęcia mogą być inne u tych dwóch podmiotów.

Pojęcia naukowe powstają, zdaniem L. Wygotskiego, inaczej niż pojęcia potoczne, rozwijają się w planowej współpracy z dorosłym. Na etapie nauki szkolnej są najczęściej kształtowane przez definiowanie przejawiające się w tworzeniu definicji lub częściej ich *surogatów* (luźnych określeń, quasi-definicji, opisów, charakterystyk, przykładów i innych zabiegów językowych[2]). Inna jest także droga tworzenia się tych pojęć; pojęcia potoczne, zdaniem L. Wygotskiego, rozwijają się od konkretności ku uogólnieniom, a pojęcia naukowe odwrotnie, od ogólnych sformułowań do konkretnych modeli i przykładów (ryc. 1).



Ryc. 1. Drogi rozwoju pojęć potocznych i naukowych

Źródło: J. Konior, *Pojęcia matematyczne i ich kształtowanie w nauczaniu szkolnym...*, s. 28.

Jak wynika z modelu, pojęcia matematyczne jako pojęcia naukowe kształtują się od ogólnych sformułowań do konkretnych przykładów. Jeśli w umyśle dziecka figura geometryczna, np. trójkąt, funkcjonuje jako obiekt empiryczny, nosi wówczas charakter naiwnego pojęcia. Gdy uczeń podejmuje próby opisu i uświadamia sobie pełny zbiór desygnatów (np. wie, że są różne rodzaje trójkątów), wyodrębnia części składowe obiektu itp., wówczas wkracza na drogę pojęcia naukowego i buduje system. Jak podaje J. Konior: „Obecność systemu pozwala operować pojęciami, a nie tylko używać ich nazw spontanicznie, jako bytów jednostkowych"[3].

Przedmiotem analiz badaczy stają się, poza drogą ich kształtowania, również rodzaje pojęć i ich rozumienie. Przykładowo inaczej pojęcie, nawet naukowe, pojmowane jest w sensie logicznym, a inaczej w sensie psychologicznym.

---

2 J. Konior, *Pojęcia matematyczne i ich kształtowanie w nauczaniu szkolnym* [w:] *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. IV, Płock 2002, s. 23.

3 *Ibid.*, s. 29.

Pojęcie w sensie logicznym to znaczenie nazwy, jest to, określony – najczęściej przez wyprecyzowanie objaśnień, np. w słowniku czy też za pomocą definicji lub układu aksjomatów – sposób rozumienia tej nazwy (symbolu, wyrażenia). W takim rozumieniu nośnikiem pojęcia są środki zmaterializowane, dostępne obiektywnie, zapis (tekst, nazwa, znak). Pojęcie *w sensie psychologicznym* jest przeżyciem psychicznym, aktem czyjejś świadomości, ma zawsze charakter indywidualny i osobisty, jest immanentne[4] i niedostępne z zewnątrz. „Obrazy o cechach naoczności mogą tu towarzyszyć przeżyciu pojęciowemu, ale nie są niezbędne, nie stanowią zatem jego istoty"[5].

Pojęcia matematyczne w sposób istotny różnią się od pojęć innych dyscyplin naukowych. G. Treliński wyjaśnia, że umyśle dziecka pojęcie matematyczne to tzw. *obiekt pomyślany*, wytworzony intuicyjnie, który „gromadzi doświadczenie zdobyte w toku działania w realnym świecie, w toku reprezentowania zdarzeń i przedmiotów obrazami oraz wyrażania tego działania słowami"[6].

Każde pojęcie posiada *zakres* i *treść*. Zakres rozumiemy jako zbiór odpowiedników (desygnatów), a treścią jest zbiór najważniejszych cech. W takim rozumieniu zakresem pojęcia *kwadrat* będzie zbiór wszystkich kwadratów, a treścią tego pojęcia będą takie cechy, jak to, że jest to czworokąt, który ma wszystkie boki i kąty równe, a jego przekątne dzielą się na połowy pod kątem prostym, są równe i jednocześnie są dwusiecznymi kątów[7]. Jak podaje G. Treliński, pojęcia matematyczne, jak np. liczba, odcinek, koło, równoległość prostych, nie mają desygnatów w świecie fizycznym, a materialne prostokątne klocki, rysunki trójkątów, patyczki są jedynie konkretnymi lub wyobrażonymi reprezentacjami abstrakcyjnych pojęć: prostokątów, trójkątów, odcinków, zbiorów, liczb. Świadomość tego faktu nie zawsze jest pełna i widoczna, dlatego w działaniach edukacyjnych należy pamiętać, że:

> Pojęcia, ich własności, rozumowania są specyficznego rodzaju przeżyciami psychicznymi, aktami świadomości, którym towarzyszą różnego typu czynności i obrazy. Aby te przeżycia stały się niezbędnymi składnikami myślenia abstrakcyjnego, muszą mieć czysto myślowy, nieosobisty charakter. Do takiego stanu można je doprowadzić, ponieważ w każdym pojęciu i rozumowaniu matematycznym „tkwią" operacje abstrakcyjne; tworzą one swego rodzaju schemat poznawczy, który integruje wiedzę o pojęciu, rozumowaniu oraz sprzyja posługi-

---

4 „Immanentny – będący wewnątrz czegoś, tkwiący w czymś, niewychodzący poza dany przedmiot, niewynikający z działania jakiegoś czynnika wewnętrznego", E. Sobol (red.), *Ilustrowany słownik język polskiego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999, s. 268.

5 *Ibid.,* s. 17–18.

6 G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna, 3M...*, s. 28.

7 B. Ladaczek, *Geometria elementarna,* Wyd. Bronisław Ladaczek, Wrocław 1999, s. 132.

> waniu się nią. Jednocześnie te operacje są związane z konkretnymi czynnościami i manipulacjami na przedmiotach[8].

Rozważając, czym jest pojęcie matematyczne, myślimy:

> [...] po pierwsze o obiekcie myślowym, którego rozumienie ustala definicja (co to jest?); po drugie o sposobie postępowania (procedurze) pozwalającym wyznaczyć ten obiekt (jak to wykonasz?, jak to wyznaczysz?); i wreszcie – po trzecie – o symbolu (kodzie) oznaczającym ten obiekt – o ile taki symbol istnieje (jak to zapiszesz?). Te trzy różne aspekty pojęcia, prowokowane odmiennymi pytaniami i wymagające wykonywania różnych czynności (konkretnych, wyobrażonych, abstrakcyjnych), zespalają się w naszej myśli, w długim procesie uczenia się, w jeden obiekt – **pojęcie matematyczne**[9].

Dziecko tworzy sobie pojęcia matematyczne w toku interioryzacji, procesu uwewnętrzniania, przebiegającego od konkretnych czynności do abstrakcyjnych operacji. Wszystkie te działania zmierzają do tego, by dziecko budowało sobie obraz pojęcia w konwencji operacyjnej, by „izolowane dotychczas schematy łączyły się w jednolity system stosunków, który pozwala ujmować je z różnych punktów widzenia równocześnie, przechodzić swobodnie z jednego punktu widzenia do innego, dochodzić do tego samego wyniku różnymi drogami, tworzyć hipotezy i wycofywać je w razie ich niesprawdzenia się, wracać do punktu wyjścia w razie błędu”[10].

Takie rozumowanie „prowadzące do pojmowania sensu elementarnych pojęć matematycznych, musi być utrzymane w konwencji operacyjnej, co najmniej na poziomie konkretnym [...]; powinno być ukształtowane poprzez działanie w określonej, konkretnej sytuacji i prowadzące do wytworzenia odpowiedniego schematu myślowego, w wyniku którego dziecko nie będzie musiało operować określonymi przedmiotami”[11].

To właśnie wytworzenie schematu myślowego – struktury poznawczej, a nie słownego wyjaśnienia danego terminu jest warunkiem operatywnego posługiwania się pojęciem matematycznym. Tę strukturę poznawczą nazywa się koncepcją (obrazem) pojęcia.

---

8 G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna, 3M...*, s. 27.

9 Id., *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I–III,* Wszechnica Świętokrzyska, Kielce 2004, s. 18, podkr. B. B.-K.

10 J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym,* Wyd. PWSZ, Racibórz 2008, s. 11.

11 E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Jak kształtuje się u dzieci psychiczna dojrzałość do uczenia się matematyki,* „Wychowanie w Przedszkolu” 1988, nr 6.

Według B. Bugajskiej-Jaszczołt koncepcję pojęcia tworzą:

- *baza intuicyjno-skojarzeniowa*, zawierająca wyobrażenia myślowe, skojarzenia oraz intuicje dotyczące pojęcia;
- *baza formalna* – fakty, będące efektem logicznej analizy definicji (określenia) lub zaakceptowane jako obowiązujące, choć niekoniecznie zgodne z intuicjami;
- *narzędzia wykonawcze,* algorytmy, strategie heurystyczne, schematy postępowania, które wykorzystuje uczący się lub które umożliwiają mu organizowanie działań podczas rozwiązywania zadań;
- *elementy systemowe* – zależności i związki z innymi pojęciami;
- *aparat komunikowania,* który tworzą systemy języków: naturalnego, symbolicznego, graficznego, formalnego, jak słownik terminologiczny oraz specyficzne segmenty syntaktyczne pełniące funkcje ekspresyjne i komunikacyjne;
- *konteksty zadaniowe* (*sytuacyjne*), w których dziecko ma do czynienia z pojęciem, przykłady, zadania, modele, relacje między nimi, stosowane zabiegi dydaktyczne rzutujące na związki pojęcia z innymi[12].

Badacze są zgodni co do tego, iż pojęcia matematyczne dotyczą obiektów nieistniejących w otaczającym świecie i jako idee, abstrakty wymagają zrozumienia pośredniego. Dlatego dzieci traktują pojęcia matematyczne jako przeżycia i zanim staną się obiektywnymi procesami, są wiedzą w działaniu, czymś, co trzeba zrobić. W przedstawionej koncepcji Bugajska-Jaszczołt ukazuje strukturę pojęcia matematycznego jako idei głębokiej, zwraca uwagę na elementy biorące udział w procesie budowania pojęcia matematycznego, na przykład często pomijane intuicje i skojarzenia, aparat językowy, kontekst sytuacyjny, których wpływ powoduje, że proces kształtowania pojęcia matematycznego jest odmienny niż np. pojęcia przyrodniczego. Jak podaje Z. Semadeni, najpierw w umyśle dziecka pojęcie pojawia się jako proces, jako „rzecz do zrobienia", a dopiero później jako obiekt[13], twór abstrakcyjny. Aby ukształtować pojęcie matematyczne, należy tworzyć konkretne sytuacje zadaniowe, w których dziecko będzie posługiwało się tym pojęciem w działaniu. Wykonywane czynności pozwolą mu poznać właściwości pojęcia, wytworzyć intuicje i skojarzenia, odkrywać konteksty, w których się nim posługujemy. Takich doświadczeń powinno być odpowiednio dużo, ale też dziecko musi być w tym działaniu aktywne wyobrażeniowo i werbalnie, otwarte na dyskusję i wymianę zdań z nauczycielem i innymi uczestnikami edukacyjnego matematycznego epizodu wspólnego zaangażowania.

---

12 B. Bugajska-Jaszczołt, D. Drygała, *Jak uczymy przyszłych nauczycieli algebry liniowej?* [w:] M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wyd. AŚ, Kielce 2006, s. 155.

13 *Ibidem.*

Wśród czynników mających wpływ na skuteczne uczenie się wstępnych elementów geometrii w dzieciństwie wymienia się komponenty poznawcze, sprawność procesów poznawczych w zakresie dokonywania operacji myślowych niższego i wyższego rzędu, takich jak np. schematyzowanie, porównywanie, abstrahowanie, uogólnianie. Nie sposób też nie doceniać znaczenia komponentów osobowościowych, w tym społeczno-emocjonalnych. S. Popek podkreśla, iż dzięki motywacyjnej i emocjonalnej sferze osobowości w sprzyjających warunkach środowiskowych zdolności (w tym matematyczne) uzyskują aktywną wartość realizacyjną, a zróżnicowanie indywidualne współdziałania opisanych wymiarów wpływa na „bogatą specjalizację typologiczną uzdolnień, a także ich jakościowy poziom”[14]. Emocje decydują o tym, jak chętnie dzieci poznają matematykę, jaka jest ich postawa wobec niej, czy i w jakim stopniu są dojrzałe do podejmowania i wykonania do końca zadań, często związanych z napięciem emocjonalnym, rywalizacją, którym towarzyszą zarówno przyjemne, jak i przykre odczucia.

3.2. TEORIE KONSTRUKTYWISTYCZNE W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Podejmowane działania edukacyjne będą trafne i skuteczne, gdy oprzemy je na podstawach teoretycznych, adekwatnej psychopedagogicznej teorii lub koncepcji wyjaśniającej proces uczenia i nauczania. Pedagogika przedszkolna, jako nauka praktyczna i normatywna, opiera się od lat na konstruktywizmie – nurcie podkreślającym związek pomiędzy wiedzą a aktywnością poznawczą człowieka oraz postrzeganie świata przez pryzmat własnej, indywidualnej wiedzy i indywidualnych doświadczeń. Konstruktywizm jako paradygmat badawczy, a także jako teoria nauczania matematyki ugruntował się w latach 80. XX wieku. Wypracowano wówczas istotne dla praktyki pedagogicznej konkluzje[15] wyjaśniające cechy i warunki skuteczności procesu edukacji matematycznej. W tej części opracowania charakteryzuję najważniejsze koncepcje rozwoju dziecka w kontekście edukacji matematycznej, a zwłaszcza proces nabywania pojęć geometrycznych. Opisuję kluczowe współczesne teorie psychologiczne, m.in. J. Piageta, L. Wygotskiego,

---

14 S. Popek, *Człowiek jako jednostka twórcza,* Wydawnictwo UMCS, Lublin 2003, s. 116–117.

15 Zob. A. Laskowski, *Tendencje w kształceniu matematycznym a niektóre „stare” przyczyny specyficznych trudności matematycznych* [w:] *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, s. 78.

J. Brunera, P. Vopěnki i M. Hejný'ego oraz P. van Hielego, akcentując znaczenie wybranych czynników w procesie budowania wiedzy geometrycznej.

3.2.1. TEORIA ROZWOJU WEDŁUG J. PIAGETA

Na metodykę nauczania matematyki w Polsce ogromny wpływ wywiera „piagetowskie" ujęcie interioryzacji czynności. Koncepcja J. Piageta (1896-1980) ujmuje rozwój jako osiąganie standardów, a proces tworzenia przez dziecko pojęć (w tym matematycznych) i sposób korzystania z tej wiedzy przedstawia jako ciąg dynamicznych zmian, dokonujących się w toku dojrzewania dziecka. Teoria Jeana Piageta ma podstawy zarówno filozoficzne, jak i biologiczne, a sam badacz prowadził pogłębione badania i studia nad rozwojem dziecka. Niniejszy podrozdział opisuje główne cechy procesu uwewnętrzniania się w umyśle dziecka nowej wiedzy i etapy rozwoju jednostki w dzieciństwie. Kończy go krytyczna uwaga na temat zakresu i jakości aktywności poznawczej małego badacza oraz roli środowiska, w którym żyje.

J. Piaget akcentuje, że proces poznawania świata opiera się na interakcji dziecka ze światem zewnętrznym i następuje w toku działań praktycznych, doświadczeń, które są „budulcem umożliwiającym konstruowanie schematów umysłowych"[16]. W wyniku tej interakcji dziecko konstruuje i przekształca schematy umysłowe, czyli struktury poznawcze, buduje wiedzę, rozwija intelekt. Inteligencja dziecka nie jest przy tym zbiorem, magazynem informacji, umiejętności czy cech, które dziecko posiada, lecz ma charakter dynamiczny, jest stale realizowanym procesem związanym z działaniami dziecka w otoczeniu społecznym[17]. Dzieci badają rzeczywistość za pomocą posiadanych schematów, w wyniku czego wytwarza się pewien jej obraz, stworzony ze zróżnicowanych jakościowo struktur.

Okres dzieciństwa cechuje powtarzanie pewnych czynności, jako reakcji na bodźce zewnętrzne (np. kontakt dziecka z zabawką), co prowadzi do wytwarzania się i uwewnętrzniania schematów działań, które mogą być zróżnicowane (np. dziecko w kontakcie z zabawką może zachowywać się podobnie lub zupełnie odmiennie). Schemat tworzy coraz bardziej sprawny (w miarę jak dziecko stosuje go do większej liczby przedmiotów) układ wyćwiczonych, o szerokim zakresie zastosowania, giętkich wzorców działania, służących jako narzędzie poznawania świata. Jest wiedzą, którą dziecko posługuje się w toku aktywności poznawczej i społecznej.

---

16 J. M. Garbula, *Znaczenie historyczne w edukacji początkowej. Narracyjne konstruowanie historii rodzinnych*, Wyd. UWM, Olsztyn 2010, s. 69.

17 R. Vasta, M. M. Haith, S. A. Miller, *Psychologia dziecka,* WSiP, Warszawa 1995, s. 47–49.

Każda nowa wiedza jest włączana (integrowana) do istniejącego już systemu, co pociąga zmiany w strukturach poznawczych. Ta funkcja – jako centralna i kierująca rozwojem człowieka, nosi nazwę *organizacji,* czyli tendencji do integrowania wiedzy we wzajemnie powiązane struktury poznawcze.

Druga istotna funkcja to *adaptacja* (przystosowanie) jako tendencja do dostosowywania się do środowiska w celu przetrwania. Adaptację tworzą dwa podprocesy: *asymilacja* – interpretowanie nowych doświadczeń z punktu widzenia posiadanych struktur poznawczych, i *akomodacja* – związana ze zmianami w istniejących schematach i dostosowaniem ich do nowych doświadczeń. Ta pierwsza wzbogaca to, co już istnieje, a druga dotyczy nowej wiedzy. Procesy te są ze sobą powiązane. W toku doświadczeń pierwotne czynności koordynują się, stają się złożone, dziecko staje się elastyczne w działaniu i potrafi zastosować przyswojone schematy do nowych sytuacji, pozwala to mu aktywnie tworzyć swoją wiedzę, a nie tylko biernie ją odbierać z otoczenia – uruchamia się przez to proces konstruowania wiedzy.

Dziecko konstruuje trzy rodzaje wiedzy: fizyczną, logiczno-matematyczną i społeczną. Działania na przedmiotach umożliwiają budowanie wiedzy fizycznej, wiedza logiczno-matematyczna jest efektem umysłowych czynności na przedmiotach, a interakcje społeczne umożliwiają konstruowanie wiedzy społecznej[18]. To, z jaką skutecznością dziecko przyswaja pojęcia matematyczne, w tym geometryczne, uzależnione jest od rozwoju zdolności operacyjnego rozumowania. Operacje, wg J. Piageta, „nie są niczym innym, jak produktem interioryzacji i koordynacji czynności, i to w takim stopniu, że bez aktywności nie mogłoby być prawdziwej inteligencji"[19]. Są rodzajem działań, które mogą być wykonywane bezpośrednio przez manipulację przedmiotami lub wewnętrznie przez manipulowanie symbolami, które w umyśle reprezentują rzeczy i stosunki. Są sposobem przekazywania umysłowi danych dotyczących świata realnego, aby potem nastąpił proces przekształcania ich tak, by mogły zostać zorganizowane i użyte przez jednostkę w toku rozwiązywania problemów[20].

W świetle teorii J. Piageta w rozwoju dziecka występują cztery główne stadia, czyli okresy rozwojowe:

1. **Stadium sensoryczno-motoryczne** (do ok. 2. roku życia); wówczas pojawiają się pierwsze schematy, czyli proste odruchy, które z czasem łączą się w giętkie, bardziej złożone działania jednostki. Myślenie na tym etapie określane bywa jako przedjęzykowe, ma charakter sytuacyjny, związane jest z wrażeniami i spostrzeżeniami. Procesy zależne od tego, co dziecko widzi, słyszy,

[18] J. M. Garbula, *Znaczenie historyczne w edukacji początkowej...*, s. 70.
[19] E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 59.
[20] J. Bruner, *Proces kształcenia*, PWN, Warszawa 1965, s. 39.

czego dotyka. Czynności motoryczne nie są zinterioryzowane, rozpoczyna się rozwój wyobrażeń, co stanowi punkt wyjścia przyszłego rozwoju pojęć. Dziecko opanowuje zasadę stałości przedmiotów dzięki powstawaniu sensomotorycznych schematów operacji na konkretnych przedmiotach. Na tym etapie aktywność geometryczna dziecka polega na zabawie manipulacyjnej, badaniu przedmiotów, dzięki czemu dziecko poznaje cechy i właściwości przedmiotów i zjawisk, np. dowiaduje się, że piłka (w kształcie kuli) toczy się, a klocek (w kształcie sześcianu) nie, że jeden przedmiot może być gładki, a drugi szorstki, mieć wierzchołki lub ich nie posiadać.

2. **Stadium przedoperacyjne** (od 2. do ok. 6 roku życia). W okresie tym dziecko zaczyna posługiwać się językiem, symbolami, słowami i liczbami, które zastępują przedmioty i wydarzenia. Czynności umysłowe, uprzednio wykonywane na konkretach, realizowane są w myśli, przy użyciu wewnętrznych symboli. Myślenie oparte jest na transdukcji, ma charakter intuicyjny, występuje zniekształcanie czynności umysłowych, dominują przeżycia emocjonalne nad intelektualnymi. Operacje umysłowe dotyczą działań konkretnych, są egocentryczne, przeważnie nie są odwracalne, choć zdolność ta rozwija się pod koniec tego okresu. Na tym etapie dziecko jest w stanie używać nazw określających pojęcia geometryczne, wyszukiwać przedmioty o określonym kształcie w bliskim realnym świecie oraz w wyobraźni, porównywać je z innymi kształtami lub cechami innych przedmiotów, opisywać, składać i rozkładać na mniejsze elementy, tworzyć według wzoru, przekształcać na różne sposoby. Następuje rozwój pojęć opartych na klasyfikacji, koniunkcji i dysjunkcji.
3. **Stadium operacji konkretnych** (od ok. 6. do ok. 11. roku życia). Aktywność umysłowa dziecka opiera się już na zdolności dokonywania operacji na zadaniach hipotetycznych, nie ograniczając się do tego, czego dziecko doświadczyło i co znajduje się obok niego. Potrafi ono myśleć o sytuacjach możliwych, potencjalnych zależnościach, rozumie sens dokonywanych przekształceń, zarówno w działaniu na przedmiotach, jak i w wyobraźni, jest zdolne do przegrupowywania elementów, wie, że każda zmiana może być zrównoważona przez zmianę przeciwną. Dziecko przeprowadza operacje umysłowe, pozwalające na rozwiązywanie problemów logicznych w formie uwewnętrznionej na posiadanych elementach wiedzy. Jest w stanie dodawać, odejmować, szeregować, odwracać porządek. Dzięki stałości spostrzegania przedmiotów i rozwoju pojęć uogólnionych dziecko jest w stanie budować swoją wiedzę o tym, że istnieją np. różne rodzaje kształtów geometrycznych, rozróżnia trójkąty (prostokątne, równoboczne, rozwartokątne, niekoniecznie posługując się ich nazwami) lub różne rodzaje czworokątów, graniastosłupów. Jest w stanie budować nowe figury z innych, dokonywać przekształceń,

nazywając przy tym swoje czynności i wykazując się rozumieniem w zakresie zmian podczas manipulacji na konkretach czy w wyobraźni. W tym czasie rozwijają się podstawowe dla logicznego myślenia pojęcia, np. masy, ciężaru, objętości.

4. **Stadium operacji formalnych** (od ok. 11. roku życia do dorosłości). Cechą tego okresu jest pojawienie się operacji abstrakcyjnych wyższego rzędu, niewymagających materiału, pod postacią konkretnych przedmiotów[21]. W tym okresie kształtuje się pełne rozumienie pojęć geometrycznych. Osoba może wykonywać operacje, które wykraczają poza bezpośrednie doświadczenie, co pozwala stawiać hipotezy i weryfikować je.

Współczesne badania, polemizujące z koncepcją stadialną, ukazują, że w rozwoju dziecka nie stadia czy etapy są najważniejsze, lecz liczba doświadczeń jednostki. Z tego względu w procesie edukacyjnym ważne jest, aby dziecko było stroną czynną, aktywnie pracującą nad stawianymi przed nim problemami.

Uczestnicząc w określonej sytuacji, małe dziecko buduje sobie jej skrypt i jest przekonane, że drugi raz jej przebieg będzie realizowany w takim samym toku. Kolejne doświadczenia powodują modyfikację skryptów, wiedza zaś staje się coraz bardziej generalna i nie zależy od stadiów rozwojowych. W toku budowania przez dziecko indywidualnej wiedzy nauczyciel powinien być świadomy zachodzącego procesu negocjowania; chęć wbudowywania nowej wiedzy we własne struktury poznawcze zachodzi bowiem z udziałem negocjacji społecznych[22]. Do tego natomiast potrzebne są czas, cierpliwość i wyzwalający, konstruktywny styl uczenia. Jeśli takie warunki zostają zapewnione, następują zmiany wiedzy w strukturach poznawczych, kształtuje się giętkość myślenia, co daje możliwości wykorzystywania wiedzy w nowych okolicznościach.

Badacze teorii J. Piageta podkreślają, że ten psycholog szwajcarski nie studiował wnikliwie procesu uczenia się kierowanego przez środowisko społeczne, czyli nauczania, nie badał zależności pomiędzy stawianymi dziecku zdaniami a kompetencjami i pojęciami, jakie dziecko rozwija. W opinii R. Schaffera pojawia się nawet określenie, że w koncepcji J. Piageta dziecko jest „samotnym, małym badaczem konstruującym znaczenia". Daje się jednak zauważyć, że zarówno kontynuatorzy myśli J. Piageta, jak i on sam w ostatnich pracach podnieśli rolę kultury (systemów symbolicznych, wpływów środowiskowych i nauczania) w rozwoju i kształtowaniu czynności poznawczych oraz ich systemów, czyli inteligencji, szczególnie w wyższych jej stadiach – stadium operacji formalnych i postformalnych[23]. Na

---

21 R. Vasta, M. M. Haith, S. A. Miller, *Psychologia dziecka,* s. 49.

22 T. Sadoń-Osowiecka, *Uczenie się geografii w edukacji wczesnoszkolnej* [w:] A. Komorowska-Zielony (red.), *Twórcze działania przyrodnicze i matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Wyd. UG, Gdańsk 2008, s. 78.

23 J. M. Garbula, *Znaczenie historyczne w edukacji początkowej...,* s. 71.

kontekst społeczny rozwoju dziecka zwracał natomiast szczególną uwagę wielki psycholog XX wieku L. S. Wygotski, zwany „Mozartem psychologii"[24], którego teorię przedstawiam syntetycznie w kolejnym podrozdziale.

3.2.2. KONCEPCJA L. S. WYGOTSKIEGO

Wybitny psycholog radziecki Lew Siemionowicz Wygotski (1896–1934) jest reprezentantem konstruktywizmu społeczno-kulturowego. W świetle tej teorii edukacja jest procesem społecznym i istotną rolę odgrywa w niej nauczyciel. Organizuje on w różny sposób aktywność dzieci, pomaga im w budowaniu interakcji i wspólnym rozwiązywaniu problemów, sam jest w relacji intelektualnej z wychowankiem. Zasadne jest zatem opisanie jego roli jako osoby wspierającej, dokonującej obserwacji i oceny gotowości dziecka do poznawania świata geometrii, ukazanie znaczenia stawianych przez niego zadań oraz zdolności dokonywania ewaluacji. Zagadnienia te przedstawiam w niniejszym podrozdziale.

Uczenie się w ujęciu L. Wygotskiego jest związane z aktywnością i zmianą, to: „nadawanie społecznie wynegocjowanych znaczeń nowo napotkanym zjawiskom, faktom i ideom"; traktowane jest nie jako nabywanie nowych pojęć, które zsumowane tworzą wiedzę jednostki, ale jako zmienianie znaczeń już posiadanych. Jest ono procesem konstruowania znaczeń w odniesieniu do kulturowego kontekstu[25]. Jest procesem społecznym, który przyjmuje charakter *spontaniczny*, *reaktywny* oraz *spontaniczno-reaktywny*. Uczenie się o charakterze spontanicznym dokonuje się w zabawie lub w toku niezaplanowanych okazjonalnych sytuacji, które dostarczają nowych doświadczeń. Dla tego etapu charakterystyczne jest to, że dziecko uczy się według *własnego programu*. Na przykład poznając kształty, przestrzeń czy ucząc się mowy, nie jest zdeterminowane przez program ułożony przez kogoś z otoczenia, lecz program opanowania tych treści ustala sobie samo.

Uczenie się reaktywne jest kierowane przez dorosłego, pojawia się w wychowaniu przedszkolnym, ale dominuje w edukacji szkolnej. Uczenie się trzeciego typu: spontaniczno-reaktywne, przejawia się w korzystaniu przez dziecko z zachęty i sugestii dorosłego. Dziecko ma poczucie, że ono samo decyduje o tym, co robi, czym się zajmuje, jakie działania podejmie, kieruje się przy tym motywacją wewnętrzną i realizuje wiele potrzeb poznawczych i społecznych. Ma także poczucie wolnego wyboru aktywności, chętnie ulega propozycjom dorosłego i jeśli uzna za interesujące, to zajmuje się tym, co proponuje jego wychowawca. L. Wygotski

[24] E. Filipiak, *Rozwijanie zdolności do uczenia się. Z Wygotskim i Brunerem w tle,* GWP, Sopot 2012, s. 10.

[25] J. M. Garbula, *Znaczenie historyczne w edukacji początkowej...*, s. 74.

podkreśla, że przedszkolak uczy się według zasady *robię to, co chcę*, ale jest przy tym podatny i plastyczny, obserwuje się u niego zachowania związane z uleganiem zewnętrznym naciskom i poddawanie się łagodnej manipulacji. Nie stanowi to oczywiście żadnego schematu, gdyż dziecko asymiluje i czerpie od partnera tylko te treści, których potrzebuje lub które są dla niego interesujące. Gdy jest zaś już obeznane z określonymi czynnościami lub wiedzą, samo może podejmować działania i przez to budować indywidualną wiedzę o świecie (matematycznym i geometrycznym).

W procesie tworzenia wiedzy zachodzące w środowisku nauczania interakcje są istotną częścią doświadczeń edukacyjnych. Mały człowiek zdobywa pierwsze doświadczenia pod opieką osób dorosłych: matki, ojca, dziadków, rodzeństwa, bardziej kompetentnego dziecka, rówieśnika – tutora. Osoba taka jest w różnych interakcjach z dzieckiem, bawi się z nim, stawia problemy, podpowiada rozwiązania, uczy w mniej lub bardziej planowy sposób. Uruchamia się przez to własna aktywność dziecka, a ono samo buduje własny obraz świata. Taka osoba wspierająca (jako stymulujący czynnik społeczny) pozwala dziecku osiągnąć więcej, niż byłoby ono w stanie samodzielnie to uczynić. Przykładowo w odniesieniu do geometrii – może dostarczać materiałów do badania, zachęcać do aktywności geometrycznej, wymieniać doświadczenia, podkreślać co dobre, sugerować, chwalić, nieinwazyjnie sprawdzać, czy dziecko dobrze zrozumiało zadanie, śledzić tok jego poczynań, stwarzać atmosferę twórczej pracy i zabawy. Jeśli na przykład towarzyszem działań przedszkolaka jest dorosły, wskazane jest, by miał on świadomość, że nie należy podawać dziecku gotowych rozwiązań, ale trzeba pomagać mu w kształtowaniu samodzielnego myślenia. Gdy działania wychowanka realizowane są ze wsparciem społecznym, mają one przeważnie charakter zewnętrzny, dokonywane są na konkretach. W toku wielokrotnie powtarzanych działań czynności zewnętrzne uwewnętrzniają się i wykonywane są w umyśle. Proces ten nazywa się interioryzacją i prowadzi do nadania czynnościom umysłowym charakteru odwracalnego.

W procesie nabywania pojęć matematycznych niezwykle istotne jest uchwycenie właściwego momentu rozwojowego, kiedy podatność dziecka na oddziaływania pedagogiczne jest największa, gdy wykazuje ono gotowość i chęć do działań matematycznych[26]. Staje się to zadaniem osoby dorosłej (nauczyciela, rodzica, tutora). Okazuje się bowiem, że te same zadania mogą mieć zróżnicowaną efektywność, a przedwczesne skłanianie dzieci do działań matematycznych lub zbyt późne rozpoczęcie oddziaływań może przynieść niekorzystne efekty. Dlatego też bardzo ważne jest uchwycenie najbardziej odpowiedniego momentu, kiedy podatność dziecka na oddziaływania edukacyjne jest największa. Jednym ze sposo-

[26] H. Moroz, *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym,* WSiP, Warszawa 1982, s. 21.

bów uwiarygodnienia związków między działaniami nauczyciela i zachowaniami dzieci jest odwołanie się do określonych przez badacza stref rozwoju: aktualnego rozwoju i najbliższego rozwoju. Metoda zadań, które dziecko winno rozwiązać samodzielnie, pozwala, zdaniem L. Wygotskiego, „ustalić tylko to, co już w dziecku aktualnie dojrzało. Lecz o stanie rozwoju nigdy nie świadczy wystarczająco samo to jedynie, co już dojrzało"[27].

– Wskaźnikiem poziomu aktualnego rozwoju dziecka jest jego wiek intelektualny, wyznaczony na podstawie tego, co już się ukształtowało w rezultacie zakończenia pewnych procesów rozwojowych. Strefa ta jest wyznaczona przez sprawności i umiejętności, które dziecko już opanowało, co dziecko wie i umie, z czego korzysta. Odczuwane są one jako poziom kompetencji oraz poczucie kompetencji i ujawniają się w spontanicznie podejmowanych działaniach, preferowaniu pewnych typów aktywności, poczuciu, że dziecko umie i potrafi.

– Poziom najbliższego rozwoju pozwala określić profil ukazujący, w jakich obszarach dokonują się przemiany, co w dziecku dojrzewa, w jakich obszarach zmiany się kończą i w jakich rozpoczynają. Ustala się go, wchodząc w aktywną interakcję z dzieckiem i badając poziom jego gotowości do korzystania z pomocy innych osób. Znajomość tej strefy pozwala określić obszary kompetencji, które wymagają wsparcia z zewnętrz. Poziom ten jest mapą obszaru gotowości dziecka do podjęcia nowych zadań.

W tab. 17 dokonuję zestawienia opisanych stref w świetle kilku kryteriów.

Obszar wrażliwy, w którym trwają przemiany rozwojowe, określający możliwości dziecka, L. Wygotski nazwał *strefą najbliższego rozwoju*. „SNR to zakres i liczba obszarów, w których trwa proces przemian rozwojowych, wskazuje ona na potencjał rozwojowy dziecka, a także na obszary wymagające szczególnego rodzaju stymulacji", jest mapą obszaru gotowości dziecka, ograniczoną na najniższym końcu przez obecny poziom umiejętności, na wyższym końcu przez poziom umiejętności, które dziecko może osiągnąć w najbardziej korzystnych warunkach[28].

Znajomość SNR dziecka pozwala dobrać odpowiednie metody stymulacji podtrzymującej, facylitującej lub/i uruchamiającej proces rozwoju[29]. Jednak aby dziecko pracowało w strefie najbliższego rozwoju, musi to być, jak podaje D. Klus-Stańska[30], strefa budowana na jego kompetencjach, a nie na kompeten-

---

27 A. Brzezińska, *Społeczna psychologia rozwoju,* Wyd. Naukowe Scholar, Warszawa 2004, s. 141.

28 *Ibidem.*

29 *Ibidem.*

30 D. Klus-Stańska, *Konteksty teoretyczne nadawania znaczeń przez dzieci. Wokół pytań o rozumienie pedagogicznego wsparcia* [w:] W. Puślecki (red.),*Wspieranie rozwoju dzieci w procesie wczesnej edukacji*, Wyd. Naukowe DSW, Wrocław 2008 s. 43.

Tab. 17. Analiza porównawcza strefy aktualnego i najbliższego rozwoju

Kategorie analizy	Strefa aktualnego rozwoju (SAR)	Strefa najbliższego rozwoju (SNR)
Proces rozwoju	– już zakończone cykle rozwoju	– trwające cykle rozwoju
Cel badania	– zakres aktualizacji posiadanego doświadczenia	– zakres korzystania z nowego doświadczenia
Metoda	– badania testowe	– badanie eksperymentalne
Rodzaje zdań	– wymagające myślenia konwergencyjnego, zamknięte – łatwe, możliwe do samodzielnego wykonania	– wymagające myślenia dywergencyjnego, otwarte – trudne, niemożliwe do samodzielnego wykonania
Typ kontaktu	– jednostronny	– dwustronny, wzajemny
Aktywność dorosłego	– formułowanie poleceń, przekaz jednokierunkowy	– współpraca z dzieckiem – wzajemna wymiana
Aktywność dziecka	– samodzielne działania	– korzystanie z pomocy dorosłego

Źródło: opracowanie własne na podstawie A. Brzezińskiej, *Społeczna psychologia rozwoju.*

cjach dziecka przeciętnego w grupie. Zadaniem nauczyciela jest więc określenie indywidualnej strefy aktualnego rozwoju dziecka, czyli tego, co dziecko już osiągnęło, co potrafi wykonać samodzielnie, a co w nim dojrzewa. Do tego potrzebna jest znajomość prawidłowości rozwoju dziecka i czujność diagnostyczna, oparta na wiedzy, intuicji pedagogicznej i znajomości etapów rozwojowych, określonych przez L. Wygotskiego jako okresy:

1) sytuacji konkretnych, czyli działań na rzeczywistych przedmiotach; na tym etapie czynności dziecka są izolowane, a ono samo nie ujmuje relacji między czynnościami;
2) interioryzacja czynności – operacji; dziecko wykonuje wówczas pewne czynności w myśli, ale przypomina sobie wtedy konkretne działania;
3) odwracalność czynności i okres operacji formalnych[31].

W zakresie stymulowania myślenia matematycznego, w tym geometrycznego, warto przytoczyć tezę L. Wygotskiego, która przyjmuje postać współcześnie adekwatnego postulatu pedagogicznego:

> Dobre jest tylko takie nauczanie, przez które rozwój jest wyprzedzany, nauczanie, które daje początek wielu wewnętrznym procesom rozwoju, które uruchamia procesy na razie dostępne dziecku tylko w sferze obcowania z otoczeniem i współpracy z kolegami, a potem po przejściu rozwoju wewnętrznego stające się wewnętrznym dorobkiem samego dziecka[32].

31 J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym*, s. 11.
32 A. Brzezińska, *Społeczna psychologia rozwoju*, s. 142.

W tym kontekście warto podkreślić, że stymulujący nauczyciel wykorzystuje potencjał wszystkich dzieci, mechanizm wzajemnego uczenia się, wzmacnia wzajemną pomoc, wymianę, współpracę, korzystanie z pomocy oraz organizuje rozważne, niezbyt przyśpieszone, mieszczące się w strefie najbliższego rozwoju, stymulujące nauczanie. W tej opinii L. S. Wygotski pozostaje w opozycji do J. Piageta, który jest zdania, że dzieci najlepiej rozwijają swoje procesy poznawcze na drodze nieformalnego kształcenia, bez nadmiernego przyśpieszania rozwoju. W tym świetle nie bez znaczenia jest to, że wielu badaczy łączy te podejścia i tworzy nowe teorie wyjaśniające proces uczenia się małego dziecka. Przykłady takich teorii czytelnik znajdzie w kolejnych podrozdziałach.

3.2.3. PODSTAWY NAUCZANIA–UCZENIA SIĘ GEOMETRII W ŚWIETLE TEORII J. S. BRUNERA

Światowej sławy współczesny amerykański psycholog Jerome Seymour Bruner (ur. 1915) wniósł do przedstawionych poglądów nową, znaczącą, empiryczną wiedzę o rozwoju poznawczym dziecka. Jego koncepcje są współcześnie punktem odniesienia w działaniach pedagogicznych i pozwalają dorosłemu określić cechy myślenia dziecka. W procesie kształtowania się dojrzałej formy myślenia, w opinii J. Brunera, człowiek rozwija trzy główne sposoby wewnętrznego reprezentowania świata: reprezentację enaktywną, ikoniczną i symboliczną. Posługuje się dwoma typami odmiennego wnioskowania: myśleniem paradygmatycznym i narracyjnym, co umożliwia mu porządkowanie doświadczenia i odgrywa istotną rolę w procesie nauczania–uczenia się geometrii. W tym rozdziale zajmę się istotą trzech rodzajów reprezentacji określonych przez tego badacza, wyjaśnię pojęcie myślenia paradygmatycznego i narracyjnego oraz scharakteryzuję znaczenie indywidualnych zasobów wewnętrznych dziecka w procesie tworzenia przez niego pojęć.

Zdaniem J. Brunera każde dziecko, na każdym etapie rozwoju można uczyć efektywnie każdego przedmiotu (więc geometrii także), pod warunkiem że jest on podawany w określonej formie, rzetelnej pod względem intelektualnym i dostosowanej do możliwości rozwojowych dziecka. Efektywne uczenie zachodzi w społecznym kontekście podczas rozstrzygania konfliktów, wymiany poglądów, przekonań, negocjowania znaczeń, aż do osiągania dojrzałych procesów myślowych, do których jednostka dochodzi dzięki reprezentacjom, definiowanym jako zbiór reguł, w kategoriach których tworzy pojęcia stałości zdarzeń, z jakimi się zetknęła[33]. Systemy reprezentacji świata stanowią w procesie budowania wiedzy o świecie swoisty układ odniesienia, a rozwój, zdaniem J. Brunera, „polega nie na

[33] *Ibid.*, s. 76.

serii odrębnych etapów, lecz na opanowaniu kolejno owych trzech form reprezentacji: enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej wraz z częściowym przekładem każdej z nich na pozostałe"[34].

Reprezentacją *enaktywną* J. Bruner określa reprezentowanie zdarzeń ubiegłych za pośrednictwem odpowiedniej reakcji ruchowej[35]. To system reguł, schematów działania na rzeczywistych przedmiotach, które dziecko tworzy w swoim umyśle i które, zdaniem G. Trelińskiego, „zapewniają umiejętność robienia czegoś i możliwość seryjnego powtarzania tego aktu"[36]. W pismach J. Brunera czytelnik może znaleźć wyjaśnienie, że pewne fragmenty doświadczenia (np. jazda na rowerze, prowadzenie samochodu czy inne złożone czynności ruchowe) mają swoją reprezentację w „mięśniach", dzięki czemu ludzie nie zapominają, jak je wykonywać, i nie muszą uzmysławiać sobie cech obiektów, które są elementami występującymi w akcie tego działania[37].

Reprezentacja *graficzno-ikoniczna* to system reguł, który umożliwia ujmowanie pojedynczych obiektów czy działań w formie obrazów, cytując J. Brunera:

> [...] podsumowuje ona zdarzenia poprzez wybiórczą organizację spostrzeżeń i wyobrażeń, poprzez czasową, przestrzenną i jakościową strukturalizację pola spostrzeżeniowego oraz przekształcone obrazy tych struktur. Obrazy czy wyobrażenia przedstawiają zdarzenia percepcyjne w sposób zbliżony, lecz konwencjonalnie wybiórczy – tak jak rysunki przedstawiają narysowany przedmiot[38].

G. Treliński wyjaśnia, że schemat ikoniczny przedstawia w sposób selektywny spostrzeżenia i wyobrażenia danego zdarzenia czy doświadczenia i podaje przykład: gdy uczeń ma za zadanie narysować stół, porządkuje przestrzennie i jakościowo wiedzę na jego temat, w toku rysowania wydziela jego istotne części, ujmuje graficznie związki między nimi i choć rysunek nie przedstawia rysowanego przedmiotu jednoznacznie, to zadanie to umożliwia organizowanie informacji na temat rysowanego przedmiotu.

Reprezentacja *symboliczna* to system ujmowany w sposób symboliczny, który „reprezentuje rzeczy za pośrednictwem cech modelowych w sposób odległy i arbitralny"[39]. Wskaźnikami funkcjonowania dziecka na tym poziomie jest zdolność posługiwania się znakiem informacyjnym, symbolem słownym lub graficz-

---

[34] J. Bruner, *Poza dostarczone informacje*, PWN, Warszawa 1978, s. 548, 552.
[35] *Ibid.*, s. 548.
[36] G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna, 3 M...*, s. 100–101.
[37] J. Bruner, *Poza dostarczone informacje*, s. 548.
[38] *Ibid.*, s. 548.
[39] *Ibid.*, s. 548.

nym, zdolność odkodowywania zapisu symbolicznego, znajomość jego znaczenia, zdolność zapisu operacji matematycznej czy przedstawianie rozwiązania zadania[40].

W praktyce mamy z reguły do czynienia z reprezentacjami mieszanymi, np. ikoniczno-enaktywnymi, symboliczno-ikonicznymi.

Tworzenie się reprezentacji umysłowych następuje w toku podejmowania przez dziecko różnego rodzaju aktywności. Dla małego dziecka najważniejsze jest działanie, nadaje ono sens znaczeniom, w jego toku rozwija się mowa i czynności myślenia, z biegiem czasu czynności zewnętrzne zmieniają się w czynności umysłowe, rozwija się zdolność posługiwania się obrazowym przedstawieniem rzeczy i rozpoczyna się okres tworzenia reprezentacji ikonicznych. W dalszej kolejności dziecko uczy się rozumienia znaczenia symbolu, posługiwania się nim i tworzenia nowych znaków. Głównym osiągnięciem dziecka w dziedzinie symbolizacji jest to, że umie ono przedstawiać świat zewnętrzny za pośrednictwem symboli wytworzonych przez proste uogólnienie: rzeczy są przedstawione jako równoważne sobie ze względu na posiadanie wspólnej właściwości.

Podstawą dla tworzenia pojęć matematycznych jest opanowywanie tych reprezentacji w odpowiedniej sekwencji oraz zdolność ich integrowania, przekładania każdej na pozostałe. Jak wyjaśnia G. Treliński:

> Każda reprezentacja określa odmienny sposób radzenia sobie z napływającymi informacjami oraz każda uwzględnia tylko wybrane jej aspekty wyznaczone przez cel, jakiemu służy. Z tego względu rzadko mamy do czynienia z reprezentacjami (regułami) w swojej czystej postaci, istnieje ich wiele wariantów i stanów pośrednich. Często mają one charakter mieszany: ikoniczno-symboliczny, symboliczno-enaktywny itp.[41]

Wyjaśnień dla postępowania nauczycieli i uczniów dostarcza także koncepcja J. Brunera dotycząca dwóch typów myślenia charakterystycznych dla ucznia w sytuacjach edukacyjnych o charakterze matematycznym.

Myślenie paradygmatyczne, zwane też logiczno-naukowym, polega na trzymaniu się zasad logiki, reguł poprawnego wnioskowania i uzasadniania twierdzeń. Podmiot (dziecko, uczeń, dorosły) podczas definiowania rzeczywistości posługuje się odpowiednią siatką pojęciową, teoriami wyprowadzonymi z obserwacji zjawisk i zdarzeń, określa przyczyny, czyni użytek z procedur, formułuje empirycznie zweryfikowane uogólnienia i wnioski. Jak podaje J. Garbula, jest to dominujący typ myślenia w nauce szkolnej, w trakcie której uczniowie uczą się dochodzenia do dobrej teorii i logicznych argumentów[42].

---

40 *Ibid.*, s. 530.
41 G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna, 3 M...*, s. 101.
42 J. M. Garbula, *Znaczenie historyczne w edukacji początkowej...*, s. 90.

Myślenie narracyjne jest sposobem przetwarzania informacji polegającym na poznawczym konstruowaniu opowiadań lub narracji. Rozumienie rzeczywistości i mówienie o niej ma charakter osobisty i bezpośredni, uwarunkowany stanem emocjonalnym jednostki. W trybie narracyjnym ważniejsze od świata obiektywnego są „subiektywne możliwe światy”[43]. Rozumowanie ma formę interpretowania otrzymywanych danych w ramach posiadanej wiedzy. W podejściu narracyjnym bada się oprócz pojęć naukowych pojęcia potoczne, schematy, skrypty, reprezentacje zdarzeń życia codziennego.

W kontekście edukacji geometrycznej podział ten może stanowić dla samokrytycznego nauczyciela punkt odniesienia w ocenie skuteczności działań sprzyjających nauczaniu geometrii. Klasyfikacja ta pomaga i skłania do organizowania aktywności pobudzających zarówno myślenie paradygmatyczne, jak i narracyjne. Prowokuje do refleksji, że pomijanie aktywizowania jednego rodzaju myślenia, np. narracyjnego, może skutkować wypracowaniem stylu edycyjnego o charakterze funkcjonalistyczno-behawiorystycznym, który cechuje sztywny, kierowniczy, dyrektywny sposób nauczania, trzymanie się sprawdzonych procedur edukacyjnych oraz egzekwowanie wiedzy nazewniczej, reprodukowanej bez zrozumienia i bez odniesienia do indywidualnych doświadczeń uczącego się. Z drugie strony, może zachęcać do nauczania treści matematycznych w stylu wyzwalającym, zgodnie z podejściem humanistyczno-adaptacyjnym i emancypacyjnym, w którym bierze się pod uwagę zdanie dziecka, jego wiedzę osobistą, wyjaśniającą i interpretacyjną, i pomaga mu, zważywszy na tempo jego indywidualnego rozwoju, konstruować nową wiedzę, w tym też nazewniczą.

W skutecznym procesie edukacji matematycznej J. Bruner akcentuje znaczenie indywidualnych zasobów wewnętrznych dziecka, jakimi są:

- *Samodzielne odkrycia dziecka*. J. Bruner jest zdania, że odkrycie pojawia się jako efekt uboczny „procesu upraszczania rzeczy”, dochodzi do niego podczas czynności manipulacyjnych, działania oraz opisywania wykonywanych czynności. P. Brigman podkreśla, że nauczyciele często definiują nowe pojęcia z pomocą opisu czynności prowadzących do ich powstania. Odkrycie dokonuje się w toku działania, a jego przeciwieństwem jest pasywne uczenie się z pozycji słuchacza. Dobry nauczyciel, zdaniem J. Brunera, konstruuje takie ćwiczenia lub doświadczenia, w których opis „narzuca się sam”, natomiast zły wprowadza dużą ilość nieistotnych działań, występujących w niejasnej kolejności, takich, że trudno je uporządkować w umyśle.
- Posługiwanie się *intuicją i przekładanie pojęć intuicyjnych na pojęcia matematyczne* (posługiwanie się językiem analitycznym). Zrozumienie intuicyjne – zdaniem J. Brunera – to „akt uchwycenia sensu, znaczenia lub struktury

[43] *Ibid.*, s. 91.

problemu, bez wyraźnego zastosowania aparatury analitycznej danej dziedziny wiedzy. W toku myślenia analitycznego jednostka formułuje przypuszczenia, stawia hipotezy, »bawi się nimi«"[44].

Jak podaje J. Bruner, rozumowanie intuicyjne „jest możliwe jedynie wtedy, gdy błąd nie jest winą ani nie pociąga nieodwracalnych skutków", warunkiem koniecznym jest więc zapewnienie poczucia bezpieczeństwa, które wyzwala swobodę poznawczą. Gdy nauczyciel promuje formalizm, nie pozwala uczniowi myśleć kategoriami matematycznymi, „odbiera dziecku wiarę w zdolność samodzielnego wykonywania procesów matematycznych. W najgorszym wypadku zamiast wyrabiać w nim bezpośrednią intuicję, wprowadza dowód formalny (niezbędny jako sprawdzian)". Gdy nauczyciel narzuca trzymanie się jednej formuły matematycznej, jedynej drogi postępowania, kształtuje przekonanie, że „wszystkie inne sposoby są dobre jedynie dla niematematycznych głąbów, stąd tylko krok do przekonania, że matematyka jest nie dla mnie".

Implikacją praktyczną wynikającą z tej teorii jest postulat korzystania przez dziecko z naturalnych intuicyjnych dróg myślenia, zachęcanie go do uaktywniania tego typu myślenia, chwalenie. Tłumaczenie nowych idei w sposób uproszczony, niezbyt może precyzyjny, dostosowany do możliwości zrozumienia przez dziecko, ale rzetelnym językiem, by potem do tych treści w toku edukacji powracać w sposób pełniejszy i dokładniejszy. J. S. Bruner uważa, że myślenie intuicyjne i kierowanie się przeczuciami jest lekceważoną, lecz bardzo istotną cechą myślenia twórczego każdego człowieka, tym bardziej w procesie nabywania kompetencji matematycznych. Wartościowe – z punktu widzenia rozwoju – jest posługiwanie się regulacją intuicyjną i wnioskowanie oparte bardziej na prymitywnych próbach i błędach niż wynikach namysłu.

- *Gotowość dziecka*, „która jest funkcją nie tyle dojrzałości, co intencji i umiejętności przekładania idei na język i pojęcia odpowiadające wiekowi uczniów". Jak podaje J. Bruner, problem przekładania pojęć na język poszczególnych grup wiekowych można rozwiązać z chwilą, kiedy zdecydujemy, co chcemy przekazać, dlatego też zadaniem nauczyciela jest przede wszystkim uświadomienie sobie własnych intencji i celu postępowania dydaktycznego. Obraz ten ma być jasny i klarowny, bo na jego podstawie formułowane będą dalsze etapy nauczycielskiego postępowania[45].

Na budowanie wiedzy matematycznej działa wiele zmiennych, takich jak: społeczne warunki rozwoju dziecka w rodzinie i placówkach edukacyjnych, zdro-

[44] J. Bruner, *O poznawaniu. Szkice na lewą rękę,* Warszawa 1971, s. 130.
[45] *Ibid*., s. 130–147.

wie, sprawność intelektualna i osobiste doświadczenia, które różnicują poziom indywidualnych osiągnięć, i inne. Istotną rolę, będąc czynnikiem rozwoju, pełnią też zadania stawiane dziecku, podczas rozwiązywania których dorosły wspiera dziecko w wysiłku. Buduje w ten sposób niejako „rusztowanie", które jest metaforycznym ujęciem interakcji. Rozwijanie świata pojęć matematycznych ma swój największy sens, gdy jednostka, zarówno dziecko, jak i nauczyciel, rozumie sens własnych działań, ale gdy tego nie doświadcza, nie znaczy to, że jest to proces niewartościowy[46]. Czasem potrzeba czasu i cierpliwości, bowiem autoobserwacja i umiejętność krytycznej refleksji to zdolności uzależnione od wielu czynników, między innymi indywidualnych doświadczeń, inteligencji intrapersonalnej, myślenia twórczego. Warto to sobie uświadomić i nad tym pracować.

3.2.4. BUDOWANIE WIEDZY GEOMETRYCZNEJ W UJĘCIU P. VOPĚNKI, M. HEJNÝ'EGO I P. VAN HIELEGO

Pedagogika przedszkolna i wczesnoszkolna nie ma zbyt długiej tradycji pedagogicznej w obszarze badań dotyczących zagadnień geometrycznych, choć stara się budować metodykę wstępnego nauczania geometrii i usiłuje opisywać rozwiązania metodyczne, wykorzystując najnowsze osiągnięcia badawcze. Do współcześnie wiodących teorii geometrycznych należą te w opracowaniu Petra Vopěnki i Milana Hejný'ego oraz Pierre'a van Hielego. Główne tezy tych koncepcji i ich odniesienie do praktyki pedagogicznej przedstawiam w niniejszym podrozdziale.

Zdaniem P. Vopěnki i M. Hejný'ego świat geometrii wyłania się (choć nie bezpośrednio) ze świata realnego, a „pierwsze i podstawowe poznawanie realnego świata jest dla dziecka poznawaniem zmysłowym"[47]. W umyśle dziecka nie ma geometrycznych obiektów, a jedynie obiekty ze świata realnego, dziecko skupia na nich uwagę, wyodrębnia je z całej reszty. Takie widzenie przedmiotów czy zjawisk, wyróżnianie ich spośród pozostałych określa się *zjawiskiem* (z czes. *jev* – zjawisko)[48]. Przy czym, jak mawiają badacze, geometryczne widzenie nie jest widzeniem przez zmysły, spoglądanie na świat geometrii jest możliwe „dzięki jakiemuś szóstemu zmysłowi [...]":

> Widzieć „to" znaczy skupić na tym uwagę, wyróżnić „to" z całej reszty [...]. Nie jest to widzenie mniej oczywiste niż widzenie realnego świata przy pomocy wzroku [...], ale ... kto straci geometryczne widzenie, nie może się do tego geometrycznego świata zbliżyć; może jedynie później śledzić to, co będziemy o tym

---

46 *Ibid.,* s. 133.

47 E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 79.

48 E. Swoboda, J. Gunčaga (red.), *Dziecko i matematyka*, Wyd. UR, Rzeszów 2009, s. 47.

> świecie mówić. Jest jak niewidomy, który znajduje się w galerii obrazów i słucha, co ludzie o obrazach mówią[49].

Dostrzeżenie czegoś przez dziecko to próby pierwszego zrozumienia. Dziecko może dostrzec interesujący kształt lub położenie przedmiotów względem siebie, podejmując przy tym aktywność intelektualną, zwaną przez P. Vopěnkę i M. Hejný'ego *intuicją geometryczną*. W toku takiego poznawania pojawiają się różnorodne aktywności, np. manipulowanie, obserwowanie, eksperymentowanie, konstruowanie. Służą one doskonaleniu funkcji spostrzeżeniowych, stanowią okazję do aktywizowania wyobraźni przestrzennej i myślenia matematycznego.

Początkowo charakter geometrycznego rozumienia jest bierny, ale badacze problemu podkreślają jego znaczenie, nazywając to zjawisko *fenomenem*, i akcentują przy tym rolę bodźca, który dziecko postrzega i który animuje go do kontaktu ze zjawiskami i obiektami geometrycznymi. Jak podaje E. Swoboda, najwcześniej akceptowanymi obiektami geometrycznymi są kwadrat, koło, odcinek i podobne, przy czym nie zawsze obiekt jest nazwany, często jest przeczuwany, bez umiejętności wyodrębnienia go pod postacią nazwy, ale „gdy zostanie nadany status osobowości geometrycznej i zaczyna się dokonywanie operacji umysłowych za pomocą zjawisk stowarzyszonych, rozpoczyna się głębsze wchodzenie w świat geometrii. Zjawiska stowarzyszone czasami przybierają postać własności. Przez to niektóre zjawiska świata geometrii zostają uznane za obiekty, a niektóre za zjawiska stowarzyszone – zaczyna się świat geometrii porządkować i wyjaśniać. Możliwe jest klasyfikowanie, stwierdzanie podobieństw i różnic. Jest to następny stopień poznania geometrycznego"[50].

M. Hejný wyróżnia trzy etapy w rozwoju rozumienia świata geometrii:

1. **Poziom przedpojęciowy**, kiedy kształty są atrybutami realnych obiektów. Na poziomie przedpojęciowym kształt jest postrzegany jako atrybut obiektu materialnego, ujmowany jest jednym aktem percepcji. Dziecko na tym etapie używa przymiotników (np. okrągły, kwadratowy, duży) jako nazw opisujących cechy przedmiotów realnego świata, dziecko postrzega figurę geometryczną jako całość, a wizualne postrzeżenia powodują tworzenie się obrazu figury. Im częściej dziecko identyfikuje obiekty o danym kształcie, tym lepiej przyswaja sobie obraz pojęcia odpowiadającego danemu kształtowi. Podczas identyfikacji dziecko nie musi posługiwać się nazwą figury (choć, z drugiej strony, bardzo szybko się jej uczy), może jedynie przeczuwać ją, bez umiejętności jej wyodrębniania za pomocą nazwy.

---

[49] P. Vopěnka, *Rozprawy s Geometrii*, Panorama, Praha 1989, s. 17.

[50] E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 80. Zob.: M. Hejný, *Analiza dydaktyczna pojęć matematycznych – przykłady geometryczne*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2001.

Na etapie przedpojęciowym, nawet gdy jednocześnie dziecko używa pojęcia koła, związane jest ono z konkretnymi przedmiotami, występującymi w otoczeniu dziecka. Mimo posiadanej umiejętności posługiwania się nazwami (trójkąt, długi, szeroki, szerszy) oraz umiejętności dokonywania porównań dziecko odnosi te pojęcia do świata realnego, jako atrybutu konkretnego przedmiotu. Znajomości figur geometrycznych na tym etapie nie należy sprowadzać do umiejętności ich rozpoznawania, któremu często towarzyszą działania plastyczne dzieci, np. rysowanie. Narysowana przez dziecko figura geometryczna, np. koło, jest odbierana jako konkretna rzecz lub niedokończony rysunek, a nie jako pojęcie geometryczne koło, które posiada niezależne, stałe własności.

2. **Poziom obiektów uosobowionych, pojęć personalnych**. Osiągnięcie tego poziomu jest możliwe dzięki wyabstrahowaniu z kontekstu geometrycznego *zjawiska*. Zjawisko zostaje wyizolowane i posiada status osobowości, który może istnieć samoistnie, a nie jako atrybut. Obiekt uosobowiony jest identyfikowany z wewnętrznym, uniwersalnym modelem (np. kwadratu). Jeśli dziecko samodzielnie nie podejmuje aktywności badawczej, podczas której kształtuje pojęcie *geometrycznego zjawiska*, wówczas istotną rolę pełni dorosły – uwrażliwia on je na zatrzymywanie uwagi na bodźcach, które dadzą początek geometrycznym wyobrażeniom, zachęca do manipulowania, badania, składania i rozkładania obiektów, werbalizowania, tworzenia nowych itp. W rozumieniu kształtów największe znaczenie ma desygnat obrazowy, dopiero później wzrasta rola słów, czyli nazw lub opisów ujmujących zbiór właściwości pojęcia[51]. Początkowo opisy nie ukazują związków między klasami obiektów (kwadratem a prostokątem), a jedynie odnoszą się do ich własności.

3. **Poziom obiektów społecznych** to poziom pojęć socjalnych, abstrakcyjnych, na którym ugruntowuje się idea pojęcia geometrycznego (kwadratu, punktu, prostej itp.), a dziecko spostrzega zbiór geometrycznych obiektów jako grupę, w której dostrzega już określoną strukturę[52].

W teorii P. Vopěnki i M. Hejný'ego widoczna jest rola dorosłego. Jest to osoba, która inicjuje proces kształtowania się pojęcia geometrycznego, podsuwa dziecku przedmioty o różnym kształcie i w różnej formie w celu pierwszych badań i porównań. W toku tych dziecięcych eksploracji pojawiają się określenia, np. talerz jest okrągły, ale książka nie, znak drogowy ma kształt trójkątny, a chustka kwadratowy. Rozpoczyna się przez to proces budowania pojęcia geometrycznego. Potrzeba tu wielu doświadczeń, wiele sytuacji wymaga powtórzeń. Ale dzięki temu, że dziecko często obserwuje i manipuluje różnymi przedmiotami, np.: talerzami,

---

51 M. Jagodzińska, *Obraz w procesach poznania i uczenia się. Specyfika informacyjna, operacyjna i mnemiczna,* WSiP, Warszawa 1991, s. 64.

52 E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 81–82.

piłkami, monetami, płytą CD, może je poznać i zidentyfikować jako przedmioty okrągłe czy kuliste. Jest to ważny przedpojęciowy poziom, umożliwiający nazywanie i rozpoznawanie kształtów oraz elementarnych ich cech. Takie działania wiodą do właściwego budowania treści pojęcia geometrycznego, funkcjonującego w umyśle już nie jako cechy konkretnych przedmiotów, np. kwadratowej chusteczki, ale abstrakcyjnego pojęcia matematycznego, idei głębokiej, kwadratu. Wyższy etap to czas precyzowania kształtu przedmiotów, operowania słowami, które umożliwiają bardziej precyzyjne porównywanie, mierzenie. Droga wnioskowania jest na tym etapie, można by rzec, odwrotna. Pierwszym bowiem punktem wyjścia był konkretny przedmiot, tu pojawia się idea głęboka, zadania polegające np. na wiązaniu poszczególnych kształtów ze znanymi przedmiotami, tworzeniu modeli, używaniu treści pojęć geometrycznych. Doświadczenia te, wielokrotnie powtarzane, pozwalają na ugruntowanie się idei głębokiej.

Jądrem teorii P. van Hielego jest teza głosząca, że wiedza dziecka o przedmiocie nie rozwija się w sposób ciągły, lecz skokowo, przechodząc kilkakrotnie na wyższy poziom myślenia. Na każdym poziomie inny jest przedmiot poznania i inny język. P. van Hiele wyróżnia pięć poziomów rozumienia przez jednostkę pojęć geometrycznych, przy czym: poziomy wzrokowy, opisowy i logiczny[53] dotyczą kształtowania pojęć na etapie przeddefinicyjnym, a więc wiążą się z nauczaniem początków geometrii. Każdy z tych poziomów jest zgodny ze stadiami rozwoju intelektualnego wskazanymi przez J. Piageta. H. Siwek dodaje:

> [...] wszystkie te poziomy charakteryzują działania, jakie są dostępne uczniowi na danym poziomie, struktury myślenia i aktywności matematyczne towarzyszące tym działaniom oraz język coraz bardziej ścisły i poprawny pod względem matematycznym[54].

Poziom wzrokowy (wizualny) jest adekwatny do stadium przedoperacyjnego J. Piageta. Na tym poziomie dzieci rozpoznają figury całościowo, porównują przedmioty, budują wiedzę o ich właściwościach, myślenie zdominowane jest przez percepcję, a dzieci są w stanie wizualnie ocenić, czy dwie figury są takie same, czy nie („bo wyglądają tak samo")[55]. *Wiedza w działaniu* jest wykorzystywana do prób wizualnego (graficznego) reprezentowania omawianych własności i relacji między obiektami. Pojawią się takie działania, jak: odtwarzanie oraz naśladowanie kształtów i stosunków obserwowanych w rzeczywistości za pomocą innych przedmiotów (klocków, mozaik) oraz próby przenoszenia takich kompozycji na

53 A. Tyl, *Aktywność geometryczna małego dziecka* [w:] I. Adamek, M. Grochowalska, E. Żmijewska (red.), *Relacje i konteksty w edukacji elementarnej,* Wyd. Naukowe UP, Kraków 2010, s. 263.

54 H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki,* Warszawa 1998, s. 36.

55 E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 85.

rysunek. Pojawia się też problem ze zdolnością opisywania kształtów, a badania wskazują na brak korelacji między rozpoznawaniem kształtów a umiejętnością ich opisu. Przykładowo łatwo rozpoznawalne koło jest obiektem, który dzieci opisują z dużą trudnością[56].

Poziom opisowy (deskryptywny) odpowiada stadium inteligencji konkretno-operacyjnej. W opinii G. Trelińskiego całościowe postrzeganie relacji, figur i ich wizualna natura (kształt) odchodzi wówczas na plan drugi, a dziecko rozpoznaje je po właściwościach. Na tym etapie dziecko potrafi przyporządkować figury do określonej klasy, konfrontować je z innymi przedmiotami oraz wyodrębniać cechy wspólne. W działaniach powinno tworzyć własne kompozycje realne, makiety (np. z piasku i gliny), schematyczne i realistyczne rysunki, poprawnie uzupełniać gotowe układy (kompozycje) o określone detale, opowiadać o wzajemnym położeniu przedmiotów i osób[57].

Poziom logiczny (teoretyczny) utożsamiany jest ze stadium inteligencji formalno-operacyjnej. Według G. Trelińskiego na tym poziomie przedmiotem poznania nie są już ani figury – kształty, ani figury – własności, ale związki między tymi własnościami, a to, co było wynikiem badania na poziomie opisowym, staje się przedmiotem badania na poziomie teoretycznym, czego efektem jest wytworzenie się sieci relacji logicznych między własnościami oraz uporządkowanie zdobytej wiedzy[58].

Cechą wspólną wyszczególnionych poziomów jest działanie, które jest inspirowane za każdym razem innymi własnościami odnoszącymi się kolejno do regularności, własności i relacji. Warto podkreślić, co czyni E. Swoboda, że poziom wzrokowy nie ogranicza rozumienia geometrii do umiejętności wyróżniania prostych figur geometrycznych i podkreśla, że są możliwe relacje między figurami geometrycznymi. J. de Lange ponadto dodaje, że na poszczególnych poziomach uczeń jest w stanie manipulować w obrębie własności znanych sobie regularności, nauczył się manipulować własnościami powiązanymi ze sobą i zaczyna manipulować istotnymi własnościami relacji[59].

Teoria P. van Hielego ukazuje stadialność rozwoju myślenia geometrycznego, akcentując wagę działań manipulacyjnych. Mając ją na względzie, nauczyciel może określić poziom myślenia dziecka, sprawność jego operacji umysłowych i język matematyczny. Koncepcja jest pomocna w interpretowaniu stopnia i zakresu umiejętności matematycznych dzieci oraz dostarcza wskazówek istotnych dla stymulującej praktyki pedagogicznej, o czym traktuje w niniejszej książce rozdział 6.

---

56 *Ibid.*, s. 85.
57 *Ibidem.*
58 G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna, 3 M...*, s. 104.
59 E. Swoboda, *Przestrzeń...*, s. 86.

3.2.5. ZNACZENIE MYŚLENIA INTUICYJNEGO I ROZUMOWANIA FORMALNEGO W PROCESIE BUDOWANIA WIEDZY GEOMETRYCZNEJ

Poznanie geometryczne odbywa się na specyficznej drodze, na której świat geometryczny nie jest możliwy do bezpośredniego postrzegania. Jest on ukryty w świecie realnym, a wyłanianie się z niego wiąże się ze specjalną aktywnością intelektualną, zwaną *intuicją geometryczną*. Myślenie intuicyjne to często lekceważona, lecz istotna forma myślenia twórczego, polegająca na operacjach opartych na bezpośredniej percepcji całości problemu. W toku takiego rozumowania podmiot dochodzi do poprawnych lub niepoprawnych wniosków bez świadomości jakości rozwiązań. Ten rodzaj myślenia jest bardzo ważny, przygotowuje umysł dziecka do zrozumienia geometrii wyższego poziomu niż tylko tej poznawanej w toku przedmatematycznych doświadczeń, będącej efektem dziecięcych działań, takich jak porównywanie czy mierzenie; geometrii pojmowanej intuicyjnie na poziomie przeddefinicyjnym. W niniejszym podrozdziale wyjaśniam pojęcie intuicji i jej znaczenie w procesie budowania wiedzy geometrycznej. W świetle literatury przedmiotu staram się wykazać różnice pomiędzy myśleniem intuicyjnym i formalnym, ukazuję związki między nimi, opisuję predyspozycje, jakie posiadają dzieci w tym zakresie, i wskazuję na możliwości ich wykorzystywania.

Matematyka i jej subdyscyplina – geometria, są uznawane za nauki wymagające przestrzegania praw logiki, ścisłej i precyzyjnej dedukcji, wyostrzonego analizowania i świadomego korzystania z różnych strategii rozwiązywania zadania. Poza wymienionymi uwarunkowaniami konkluzje płynące ze współczesnych badań wskazują na istnienie innych czynników, takich jak przeczucia, wgląd czy przypuszczenia, które są działaniem intuicji matematycznej. Z tych powodów zależności pomiędzy myśleniem formalnym i intuicyjnym oraz ich znaczenie w procesie budowania wiedzy geometrycznej stają się przedmiotem analiz dydaktyków i psychologów matematyki. Warto się więc bliżej przyjrzeć temu zagadnieniu.

W potocznym rozumieniu *intuicja* objawia się w postaci nagłego przebłysku myślowego, w którym dostrzega się myśl, rozwiązanie problemu lub odpowiedź na nurtujące pytanie. Jest procesem podświadomym, którego nie można kontrolować, można jedynie dopuszczać lub odrzucać podawane przez nią rozwiązania. Według *Encyklopedii PWN* „Intuicja to filozoficzne poznanie bezpośrednie, którego wiarygodność jest zawarta w nim samym i nie wymaga innych dowodów; to też psychologiczne przekonanie nieoparte na świadomym rozumowaniu ani świadomym przypomnieniu”[60].

---

[60] http://encyklopedia.pwn.pl/lista.php?co=intuicja; data dostępu: 26.01.2011 r.

Przedmiotem mojego zainteresowania jest intuicja rozpatrywana w odniesieniu do matematyki, a szczególnie geometrii. Tu występuje w dwóch ujęciach jako *zespół zdolności, czyli myślenie intuicyjne*, przejawiające się w doznawaniu olśnienia polegającego na znalezieniu rozwiązania, do którego jednostka musi jeszcze znaleźć rozwiązanie, oraz w kontekście personalistycznym, jako *szczególna dyspozycja*, zwaną *intuicją matematyczną*, przejawiająca się w umiejętności podawania trafnych i szybkich rozwiązań lub sposobów rozwiązania problemu[61]. Myślenie intuicyjne, przykładowo według N. Webstera, jest bezpośrednim zrozumieniem lub poznaniem, przy czym „bezpośrednie" jest tu przeciwieństwem pośredniego, czyli zrozumienia, polegającego na zastosowaniu formalnych metod analizy i dowodzenia. Wiąże się ono ze zrozumieniem sensu, znaczenia czy struktury problemu lub sytuacji bez wyraźnego oparcia się na analizie[62]. Jest procesem bardziej kreatywnym i działającym na wyższym poziomie abstrakcji w porównaniu z myśleniem logicznym[63]. W opinii K. Lecha myślenie intuicyjne, czyli kierowanie się przeczuciami, wnikliwe przypuszczenia, płodne hipotezy, odważne przeskoki do próbnej konstrukcji – to najcenniejsze składniki myślenia, zarówno w codziennym życiu, jak i w formalnych dyscyplinach akademickich[64].

Jako że pojęcie *intuicja* pochodzi od łacińskiego słowa *intueri*, co oznacza oglądać, wglądać, w pierwotnym znaczeniu intuicja jest rozumiana jako ujęcie pewnego przedmiotu wzrokiem. W takim rozumieniu geometria, którą stworzyli Grecy, jest nauką intuicyjną, a poznanie matematyczne jest intuicyjne, jeśli odnosić się do pojęć, którym towarzyszą obrazy. Jest to jednak tylko jeden poziom ujmowania geometrii jako nauki przez pryzmat jej związku z intuicją. Badacze z czasem doszli do wniosku, że intuicja przekształca się w wyniku doświadczenia naukowego w intuicję wyższego rzędu, zwaną przez F. Kleina *intuicją wyrafinowaną* lub przez G. Bouliganda *przedłużoną*, w której interpretacja traci sens fizyczny[65]. I tak wzajemne związki pomiędzy intuicją a formalizmem stają się niepodważalne.

Dla rozumienia specyfiki nauczania ważne jest ustalenie wzajemnych związków między wnioskowaniem empirycznym, rozumowaniem intuicyjnym i formalnym. Z. Krygowska wskazuje, że wnioskowanie empiryczne występuje w toku takich sytuacji, gdy uczeń:

> 1. Obserwuje fizyczne stosunki przestrzenne lub ilościowe, występujące w jego naturalnym otoczeniu, w modelu lub na rysunku i, bezpośrednio je matematy-

---

[61] J. Bruner, *Proces kształcenia*, PWN, Warszawa 1965, s. 59.
[62] *Ibid.*, s. 63.
[63] http://pl.wikipedia.org/wiki/Intuicja, data dostępu: 26.01.2011 r.
[64] J. Bruner, *Proces kształcenia*, s. 98.
[65] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. 1, s. 132.

> zując, to jest opisując w terminach matematycznych, to, co widzi lub stwierdza doświadczeniem, formułuje hipotezę matematyczną.
> 2. Wykonuje ciąg prób matematycznych (np. obliczeń) i dostrzegając pewną prawidłowość w rezultatach tych prób, formułuje hipotezę matematyczną, a więc stosuje metodę indukcji tak, jak ją stosuje przyrodnik[66].

Takiego rodzaju działania są wiodące w nauce szkolnej, są one kierowane przez nauczyciela w sposób świadomy i celowy, by rozbudzić aktywność matematyczną ucznia w drodze empirycznego, poprawnego wnioskowania. Z drugiej strony, obserwuje się u uczniów inne rozumowania, uczeń w toku matematycznych działań często dochodzi do wniosku, że „być może tak jest", „tak powinno być", ale nie uświadamia sobie, dlaczego tak powinno być, choć może podejmować próby wyjaśnień. Jest to przykład wykazywania się rozumowaniem intuicyjnym, opartym na przesłankach, co do których nie ma on wątpliwości i „w których zostały skoncentrowane różne jego przedmatematyczne doświadczenia (np. porównywanie, mierzenie wielkości)"[67]. Rozumowanie ucznia nie ma przy tym charakteru formalnego ani empirycznego, bo takie wystąpi, gdy uczeń będzie się doszukiwał ogólnego prawa obejmującego znane mu przypadki. Jak podaje Z. Krygowska, przykładowo intuicyjne pojęcie może pojawić się na tle odpowiednio przez nauczyciela pokierowanego eksperymentu fizycznego. W tym ujęciu rozumowanie ucznia można potraktować jako intuicyjne, gdy w toku rozwiązywania jakiegoś zagadnienia:

> 1. posługuje się przede wszystkim wyobraźnią, to jest obrazami pojęć, które rozważa, niezależnie od ich formalnych definicji;
> 2. przeprowadza skrótowe rozumowania oparte na oczywistych dlań przesłankach niezależnie od ich wywiedlności w ramach danego układu lub
> 3. formułuje hipotezę matematyczną opartą na dostrzeżonych analogiach, odpowiedniościach, odwzorowaniach lub
> 4. uzasadnia swoje wnioski niezanalizowaną dokładnie rekurencją.

Dla wyjaśnienia wszystkich kluczowych pojęć istotne wydaje się także przywołanie interpretacji Z. Krygowskiej, czym jest rozumowanie formalne. Można o nim mówić w tych kategoriach, gdy uczeń:

> [...] zdaje obie sprawę z przyjętej podstawy dedukcji; świadomie w toku rozwiązywania zagadnienia stara się każdy z kolejnych wniosków precyzyjnie wywieść z uznanych już w danym układzie twierdzeń i definicji; korzysta prawidłowo z definicji, używa terminu tylko w sensie nadanym mu przez tę definicję i rozumie, że nowy termin może wprowadzić do swoich rozważań po wyjaśnieniu

66 *Ibid.*, s. 136.
67 *Ibid.*, s. 138.

> jego znaczenia za pomocą terminów już wprowadzonych; korzysta prawidłowo z twierdzeń, tzn. odrywa tezę po dokładnym skontrolowaniu, czy w danym przypadku są spełnione założenia[68].

Należy przy tym zaznaczyć, że granica pomiędzy rozumowaniem intuicyjnym i formalnym nie zawsze i nie w każdej sytuacji jest wyraźna i najczęściej rozumowanie to jest intuicyjno-formalne. Poza pytaniem, czym jest myślenie intuicyjne, od dziesiątek lat w badaniach pojawia się także pytanie, co na nie oddziałuje. Wiedza psychologów na temat tych zagadnień jest niewielka, brak jest obiektywnych danych, ale, jak podaje Z. Krygowska, w nauczaniu matematyki nie można się opierać na oczekiwaniu na wątpliwe olśnienia naszych uczniów twórczą ideą; dlatego też należy się skoncentrować na charakterystyce tzw. *intuicji matematycznej dziecka*[69].

Z. Krygowska pisze:

> [...] intuicja pierwotna nadaje sens formalizmowi, formalizm przedłuża intuicję, czyni ją bardziej wyrafinowaną, wzbogaca ją, umożliwia bezpośredni wgląd w to, co mogłoby wydawać się pustą abstrakcją; nowa intuicja wypełnia treścią wyższy stopień formalnych konstrukcji i ten sam proces powtarza się na wyższym poziomie[70].

W odniesieniu do geometrii intuicja „może wskazać, co jest ważne, interesujące i dostępne, zabezpieczając nas przed błądzeniem w ogromnej przestrzeni problemów, idei i metod"[71]. I choć częściej zestawia się ją na zasadzie kontrastu z myśleniem analitycznym i formalizmem (określając np., że to „technika dochodzenia do prawdopodobnych, lecz prowizorycznych sformułowań, bez przechodzenia przez poszczególne szczeble analizy, dzięki którym można ocenić wnioski w kontekście prawdy czy fałszu"[72]), niż rozpatruje łącznie, jej znaczenie jest niezwykle istotne i potwierdzone przez najwybitniejszych matematyków[73].

Zależności tego rodzaju wyjaśnia także W. D. Gonczarow. Jego zdaniem myślenie intuicyjne jest myśleniem o danej abstrakcyjnej sytuacji za pośrednictwem jakiegoś modelu. Odwoływanie się do niego może mieć dwojaki charakter, może być czynnikiem, stymulatorem lub inhibitorem. Jeśli wykorzystujemy go

68 *Ibid.*, s. 143.
69 *Ibid.*, s. 130–131.
70 *Ibid.*, s. 132.
71 J. Filip, T. Rams, *Dziecko...*, s. 212, 134.
72 J. Bruner, *Proces kształcenia*, s. 18.
73 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. 1, s. 129.

do sprecyzowania i wyrażenia pomysłu, jego rola jest pozytywna, bo jak dowodzi Z. Krygowska:

> Struktura jest schematem, który zachowuje tylko część stosunków występujących w jej pierwotnych modelach. Ale w myśli tego, kto się tym schematem posługuje, zostaje pamięć tych modeli, zostają obrazy niektórych stosunków. Te obrazy towarzyszą rozumowaniu, mogą nasuwać nowe, twórcze idee przez właściwe analogie. W tym sensie interpretujemy jeden z aspektów intuicji jako pamięć własnych doświadczeń zdobytych na wyższym już poziomie abstrakcji, służąc myśleniu jako system orientacyjnych znaków, pomagając przy wyborze drogi w trudnym terenie [...] i jeżeli ta pamięć jest skoncentrowana na tych właściwościach modelu, które zostały zachowane w schemacie, jej rola jest bardzo twórcza[74].

Model może także być w umyśle na tyle silnie umiejscowiony, że powoduje koncentrację na pewnych, może nieistotnych, cechach szczególnych, co niekiedy prowadzi do błędnych hipotez i zawodu intuicji. Obserwuje się więc prostą zależność: jeśli ktoś ma wiele doświadczeń, pozwala mu to na słuszne przewidywania i przeprowadzanie skróconych rozumowań. Jak uzasadnia Z. Krygowska: „Pamięć o modelach jest źródłem pewnych intuicji w dziedzinie ich abstrakcyjnego schematu"[75].

W świetle tych rozważań gromadzenie nowych doświadczeń, odkrywanie świata matematyki, posługiwanie się jej językiem, negocjowanie posiadanych już znaczeń to najważniejsze zadania edukacji geometrycznej dzieci. Dlaczego? Ponieważ stwarzanie takich okazji edukacyjnych buduje u wychowanków pamięć doświadczeń już na poziomie abstrakcyjnego schematu. Dzieci jako osoby o niezwykle chłonnym umyśle bardzo szybko zapamiętują, budują zasoby pamięciowe składane ze swoich najmniejszych doświadczeń, mają naturalną potrzebę eksploratywności, stawiania pytań, odkrywania świata. Są też bardziej niż dorośli odważne w korzystaniu ze swojej intuicji, mają mniej blokad emocjonalnych, są mniej krytyczne wobec siebie i bardziej twórcze.

Dydaktyka matematyki ukazuje, jak można świadomie oddziaływać w tym zakresie na rozwój dziecka i podkreśla kształcenie w dziecięcej pamięci własności modeli oraz uczenie techniki pomagania sobie różnego typu modelami – konkretnymi i abstrakcyjnymi w toku rozwiązywania zadań. Akcentuje kształtowanie pamięci matematycznych doświadczeń, czyli stwarzanie przedszkolakom i małym uczniom okazji do obserwowania i badania stosunków przestrzennych w rzeczywistości lub z wykorzystaniem ich modeli, skłaniania małych uczniów do wykorzystania daru intuicji. Nauczyciel powinien mieć przy tym świadomość,

---

74 *Ibid.*, s. 134.
75 *Ibid.*, s. 135.

że proces ten nie następuje samoistnie i, jak ujmuje to J. Bruner, błędne jest traktowanie intuicji jako czegoś, co przychodzi samo i bez trudu. Intuicja opiera się na znajomości danej dziedziny wiedzy i jej struktury, pozwala myślącemu na dokonywanie przeskoków i korzystanie ze skrótów myślowych.

Dobra znajomość zagadnienia jest podstawą kształtowania intuicji, dlatego wskazane jest studiowanie interesujących dziecko zjawisk, kierowanie procesem budowania doświadczeń i skłanianie do rozporządzania nimi. Z drugiej strony, jeśli dziecku brak doświadczeń geometrycznych, myślenie intuicyjne może być drogą odkrywania matematycznych zależności metodą prób i błędów, weryfikacji w kontakcie z bardziej kompetentnym rówieśnikiem czy dorosłym swojej wiedzy i umiejętności. Należy wspierać matematyczne myślenie intuicyjne dzieci i małych uczniów, mimo że stosowanie metod intuicyjnych wiąże się z ryzykiem wystąpienia mylnego wnioskowania. Z. Krygowska formułuje nawet wniosek, że jednym ze środków poprawnego harmonizowania tych odmiennych elementów myślenia matematycznego jest „formalna legalizacja intuicyjnych rozumowań". Jej istotą jest to, że nauczyciel przyjmuje za podstawę dowodu podany przez ucznia intuicyjny szkic, którego jeszcze nie można uznać za rozwiązanie poprawne i wystarczająco ścisłe, ale można je przekształcić w rozumowanie o charakterze formalnym, precyzując użyte przez ucznia terminy, tłumacząc na język matematyki obrazowe ilustracje rysunkiem i gestem oraz uzupełniając w toku dyskusji i negocjowania znaczeń pominięte ogniwa dedukcji[76]. Należy przy tym być ostrożnym i wnikliwym, „aby odróżnić błąd intuicji – niewłaściwy, ale interesujący przeskok myślowy – od błędu wynikającego z głupoty czy ignorancji; wymaga się też, by nauczyciel mógł jednocześnie wesprzeć i poprawić ucznia myślącego w sposób analityczny"[77], czyli przebiegający w określonym porządku, z pełną świadomością informacji i operacji, ostrożnym rozumowaniem i określonym planem działania.

Podsumowując, można uznać, że różne formy myślenia: intuicyjne i analityczne, empiryczne i formalne, wzajemnie się uzupełniają, choć ich rozwijanie nie jest łatwe. J. Bruner podkreśla:

> [...] kto nie widzi nic pięknego ani wspaniałego w matematyce, nie może wzbudzić w innych głębokiego przejęcia się tym przedmiotem. Nauczyciel, który nie chce czy nie może pozwolić działać własnej intuicji, nie będzie miał prawdopodobnie dobrych wyników w rozbudzeniu intuicji u swoich uczniów[78].

76 *Ibide.*, s. 144.
77 *Ibid.,* s. 70.
78 J. Bruner, *Proces kształcenia*, s. 92.

3.3. AKTYWNOŚĆ MATEMATYCZNA I MATEMATYZOWANIE

Aby wyjaśnić pojęcie aktywności matematycznej czy geometrycznej, należy wyjaśnić samo pojęcie aktywności, przybliżyć jej cechy i rodzaje. W języku pedagogiki pojęcie to pojawia się bardzo często, a rozwijanie aktywności jest postulatem dydaktycznym od setek lat. W odniesieniu do matematyki napotykamy wiele odnoszących się do niej terminów, takich jak aktywność matematyczna, geometryczna, aktywizowanie, matematyzowanie. Pojęcia te wymagają wyjaśnienia. W niniejszym podrozdziale odpowiem na pytanie, czym jest aktywność, jakie są cechy, rodzaje i przejawy aktywności matematycznej oraz jak badacze wyjaśniają istotę matematyzowania.

Aktywność jest podstawowym mechanizmem uczenia się. Poprzez nią człowiek reguluje swoje stosunki z otoczeniem, realizuje cele i dążenia oraz ujawnia swoje możliwości.

Zdaniem J. Strelaua jest to „cecha temperamentu, która przejawia się w ilości i zakresie podejmowanych działań o określonej wartości stymulacyjnej”[79]. U jej podstaw leży zawsze określona chęć działania, którą uruchamiają czynniki wewnętrzne, czyli potrzeby, oraz zewnętrzne – zadania. Przykładowo dziecko, zaspokajając potrzeby poznawcze, np. potrzebę eksploratywności czy etykietowania[80], poprzez działania na przedmiotach, poznaje otaczający świat materialny, występujące w nim zjawiska i prawidłowości. Zarówno w odniesieniu do świata społecznego, jak i materialnego mały człowiek może poznawać go drogą zmysłowo-doświadczalną lub matematyczno-logiczną. W pierwszym przypadku materiałem poznawania są barwy, kształty, zapachy, smaki i dźwięki, w drugim – słowa i zawarte w nich treści. Zadania stawiane przez nauczyciela są natomiast drugim ważnym motywującym do rozwoju ucznia czynnikiem. Te celowo i świadomie wprowadzają w świat wiedzy i proces budowania kompetencji, służą celom dydaktycznym i są realizowane w toku obcowania z ludźmi i przedmiotami. Niezależnie jednak od formy czy motywu podjęcia aktywności należy podkreślić, że angażuje ona wszystkie funkcje motoryczne, zmysłowe i uczuciowe i „wyzwolona daje uczucie satysfakcji i zadowolenia”[81].

---

79 J. Strelau, *Temperament i inteligencja*, Warszawa 1982, s. 65.

80 M. Kielar-Turska, *Potrzeby i możliwości poznawcze dziecka,* „Wychowanie w Przedszkolu”, 1989, nr 1.

81 T. Kłosińska, *Droga do twórczości. Wdrażanie technik Celestyna Freineta,* Of. Wydawnicza Impuls, Kraków 2000, s. 19.

Aktywność bywa klasyfikowana w różnoraki sposób. Dzieli się ją ze względu na cel, rodzaj materiału, bodźce, rodzaj czynności, charakter interakcji, kierunek czynności, czas, wynik, typ motywacji czy dominującą sferę osobowości[82].

Zdaniem wielu dydaktyków (Z. Krygowskiej, S. Turnaua, G. Trelińskiego, H. Broekmana) na matematykę i aktywność na lekcjach matematyki można spojrzeć z dwóch skrajnych punktów widzenia. W jednym ze stanowisk matematyka jest strukturą pojęć i twierdzeń, wiedzą obiektywną, która istnieje i musi być przez ludzi odkrywana. Jest produktem specyficznej aktywności. To część, która jest włączona w kanon szkolny i musi być przekazywana dalej. Zgodnie z drugim poglądem matematyka jest dziedziną wielostronnej twórczej i poznawczej działalności ludzi, którzy ją tworzą, rozwijają, stosują, a także emocjonalnie przeżywają. W pierwszym rozumieniu dziecko przyswaja gotową wiedzę, która jest efektem aktywności nauczyciela, w drugim nauczyciel stwarza sytuacje, by uczeń odkrywał nowe dla siebie obszary wiedzy[83].

Inne koncepcje ujmują ją z dwóch perspektyw: jako system działań podejmowanych w toku i przez interakcje społeczne oraz jako system działań ujawniających się w kontakcie ze światem materialnym i przedmiotami o wartości edukacyjnej. Oba źródła aktywności są równie wartościowe. Obcowanie z innymi ludźmi wyzwala aktywność, a dziecko przez kontakty społeczne zdobywa wiedzę, poznaje świat wartości, bogaci swoje życie, przejmuje wzorce zachowań społecznych. W odniesieniu do matematyki źródłem takiej aktywności będzie osoba nauczyciela, jego styl uczenia i jego elementy, np. precyzyjnie skonstruowane instrukcje (przepisy algorytmiczne, instrukcje typu heurystycznego), a także zadania do wykonania (w tym zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte, typowe i nietypowe) oraz naśladowanie aktywności cudzej (nauczyciela, kolegów i innych osób)[84]. Natomiast drugie źródło aktywności to świat materialny, występujące w nim zjawiska, przedmioty, materiały, narzędzia. Dziecko może poznawać go drogą zmysłowo-doświadczalną lub matematyczno-logiczną. W pierwszym przypadku materiałem poznawania są barwy, kształty, zapachy, smaki i dźwięki, w drugim – słowa i zawarte w nich treści.

Inny podział aktywności wyodrębnia trzy jej rodzaje, tu kryterium podziału stanowi rodzaj materiału, z jakim dziecko może mieć do czynienia. Wymienia się więc aktywność manipulacyjno-ruchową, której istotą jest kontakt ze światem

---

82 J. Uszyńska-Jarmoc, *Podróże – Skarby – Przygoda. Podręcznik i program rozwijania twórczości, samoświadomości oraz dyspozycji autokreacyjnych dzieci z klas I–III,* Wydawnictwo Trans Humana, Białystok 2005.

83 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. 2, s. 13.

84 E. Kozak-Czyżewska, *Formy aktywności matematycznej uczniów klas początkowych* [w:] S. Guz, T. Sokołowska-Dzioba, A. Pielecki (red.), *Wielowymiarowość aktywności i aktywizacji*, WSP TWP, Warszawa 2008, s. 143.

poprzez ruch i dźwięk, werbalną, której przejawem jest kontakt przy użyciu słowa, oraz symboliczną, dla której środkiem wyrazu staje się obraz[85]. Każdy wymieniony rodzaj aktywności ma miejsce w działaniach matematycznych z uwzględnieniem geometrii.

W literaturze przedmiotu termin „aktywność matematyczna" pierwotnie odnosił się do aktywności umysłu matematyka. Z czasem zaczęto ujmować ją względem dominującej sfery aktywności (emocjonalna, fizyczna, intelektualna) i charakteryzować jej przejawy.

Przez „aktywność matematyczną ucznia rozumie się aktywność skierowaną na kształtowanie pojęć i rozumowań typu matematycznego, stymulowaną przez problemy abstrakcyjne lub problemy teoretyczne dotyczące sytuacji konkretnych"[86].

Badacze zwracają przy tym uwagą na różny charakter i motywy podejmowania aktywności matematycznej. Przykładowo I. G. Treliński „**aktywnością matematyczną** ucznia klasy nazywa całokształt jego działalności związanej z kształtowaniem pojęć i rozumowań typu matematycznego, stymulowaną przez różnego rodzaju sytuacje i działania. Może ona obejmować:

a) czynności konkretne nakierowane na tworzenie lub badanie pojęć i rozumowań, o ile są początkowym ogniwem procesu ich kształtowania;
b) czynności myślowe (wyobrażone i abstrakcyjne) skierowane na kształtowanie pojęć, ich badanie lub posługiwanie się nimi, na kształtowanie i prowadzenie rozumowań, formułowanie i rozwiązywanie problemów teoretycznych i praktycznych"[87].

J. Nowik podkreśla znaczenie motywacji wewnętrznej oraz jej aspekt praktyczny, określając aktywnością matematyczną „samodzielne i chętne, a zarazem samorzutne podejmowanie rozwiązywania problemów matematycznych, umiejętne stosowanie matematyki, np. dostrzeganie możliwości zastosowania matematyki do rozwiązywania problemów pozamatematycznych"[88].

Próbując wskazać i określić najważniejsze rodzaje aktywności matematycznej, Z. Krygowska wymienia:

– aktywną postawę wobec problemów (formułowanie, rozwiązywanie);
– stawianie i weryfikowanie hipotez (wnioskowanie empiryczne, dedukcja);
– uogólnianie;
– stosowanie podstawowych technik heurystycznych;
– umiejętność uczenia się z wykorzystaniem różnych źródeł;

---

85 M. Żebrowska, *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży*, PWN, Warszawa 1980, s. 148.
86 J. Filip, T. Rams, *Dziecko...*, s. 34.
87 G. Treliński, *Stymulowanie aktywności – przeciwdziałanie bezradności matematycznej ucznia* [w:] Z. Ratajek (red.), *Uczeń we współczesnej szkole. Problemy reformy edukacji wczesnoszkolnej,* Wyd. Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2005, s. 49, podkr. B. B.-K.
88 J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym,* s. 18.

– umiejętność matematyzowania z użyciem pojęć i języka matematycznego[89].

W. Nowak wyróżnia jako matematyczne aktywności: przejmowanie, asymilowanie i przetwarzanie informacji (łącznie z porządkowaniem i utrwalaniem wiedzy); sprawne i racjonalne argumentowanie; stosowanie matematyki, zdolność wyrażania własnej myśli matematycznej oraz działania twórcze[90].

J. Grochulski i H. Ruszczyk opisują znaczenie wybranych aktywności matematycznych, takich jak:

a) Dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, jako niezmiernie istotny mechanizm matematycznej twórczości podkreślany przez S. Banacha. Przykładowo: jeśli uczeń potrafi dokonać transferu określonej własności z danej sytuacji do innej, traktowanej jako analogiczna, wówczas jest aktywny matematycznie.
b) Schematyzowanie – zdaniem H. Freudenthala szczególnie ważny rodzaj aktywności, gdyż stanowi element matematyzacji. Schematyzowanie to nie tylko uświadamianie sobie strukturalnej analogii, ale także budowanie obiektu podobnego do innego z użyciem określonego kodu. Schematyzowanie może się wyrażać w materialnym schemacie, w formie definicji, twierdzenia czy algorytmu.
c) Definiowanie, interpretacja definicji, właściwe korzystanie z definicji – to zabiegi dydaktyczne zmierzające do konstrukcji definicji pojęcia, którego intuicje są kształtowane w umyśle ucznia i prowokują aktywność bogatą w różne intelektualne procedury. Tu uczeń, z jednej strony, korzysta z intuicyjnej wiedzy i obrazów związanych z definiowanym pojęciem, a z drugiej strony, musi się ograniczyć do formalnych następstw przyjętej definicji.
d) Dedukcja i redukcja – które odgrywają istotną rolę zarówno w aktywności badawczej, jak i weryfikacji wyników działania.
e) Kodowanie i stosowanie języka symbolicznego – jako racjonalne posługiwanie się językiem symbolicznym w szkolnym nauczaniu matematyki[91].

W świetle tych klasyfikacji aktywność jawi się jako działanie zewnętrzne lub uwewnętrznione. Nie można więc określić, że jeśli ktoś nie wykonuje fizycznie pewnych czynności matematycznych, to nie jest aktywny matematycznie. Jest wiele rodzajów aktywności. E. Kozak-Czyżewska systematyzuje aktywność matematyczną, wyróżniając osiemnaście jej form ze względu na typ operacji wpływającej na

---

89 Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich,* Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 6, 1986, s. 25.

90 E. Kozak-Czyżewska, *Formy aktywności matematycznej uczniów klas początkowych...*, s. 143.

91 J. Grochulski, H. Ruszczyk, *Aktywizacja uczniów w procesie nauczania matematyki* [w:] M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wyd. Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2006, s. 254–255.

rodzaj aktywności (aktywność twórcza lub odtwórcza), charakter wykonywanych czynności (czynności manipulacyjno-ruchowe, słowne: przejawiające się zarówno w mowie głośnej, jak i cichej, oraz umysłowe), rodzaj materiału stanowiącego podstawę wykonywanej czynności (manipulacyjny, graficzny, symboliczny). Poniżej przedstawiam najważniejsze opisane przez E. Kozak-Czyżewską cechy poszczególnych aktywności[92].

Tab. 18. Aktywności matematyczne i ich cechy

<table>
<tr><th>Charakter aktywności</th><th>Materiał</th><th>Rodzaj aktywności</th><th>Cechy aktywności</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Odtwórcza</td><td rowspan="3">konkretny</td><td>manipulacyjno-ruchowa</td><td>uczeń odtwarza ściśle określoną sytuację lub schemat, np. układa klocki wg podanego wzoru, odtwarza kompozycje, posługując się konkretami</td></tr>
<tr><td>słowna</td><td>aktywność jest wspomagana opisem słownym, np. uczeń wymienia cechy kwadratu i odnajduje w sali przedmiot o takim kształcie</td></tr>
<tr><td>umysłowa</td><td>uczeń wykazuje się operacjami umysłowymi, takimi jak porównywanie, porządkowanie, klasyfikowanie, analizowanie, dokonywanie syntezy</td></tr>
<tr><td rowspan="3">graficzny</td><td>manipulacyjno-ruchowa</td><td>uczniowie tworzą uproszczone schematy działań (np. ułóż tyle pętli, ile jest grup dzieci: dziewczynek i chłopców, do pętli włóż tyle guzików, ile jest osób)</td></tr>
<tr><td>słowna</td><td>opisowi towarzyszą działania , w których występuje graficzny zapis, służący pełniejszej interpretacji, np. uczeń wybiera spośród schematów graficznych ten, który pasuje do rozwiązania zadania</td></tr>
<tr><td>umysłowa</td><td>zestawianie danych w postaci tabel, uzupełnianie grafów, przedstawianie zakodowanych informacji, zamiana formy graficznej na inną równoważną</td></tr>
<tr><td rowspan="3">symboliczny</td><td>manipulacyjno-ruchowa</td><td>uczniowie posługują się symbolami do zapisu czynności i efektów działań matematycznych</td></tr>
<tr><td>słowna</td><td>aktywności słownej towarzyszą działania związane z posługiwaniem się materiałem symbolicznym, dziecko rozumie sens i znaczenie symboli</td></tr>
<tr><td>umysłowa</td><td>rozwiązywanie zadań tekstowych, wypracowywanie i utrwalanie algorytmów rozwiązywania zadań, posługiwanie się rachunkiem pamięciowym i obliczeniami sposobem pisemnym</td></tr>
</table>

92 E. Kozak-Czyżewska, *Formy aktywności matematycznej uczniów klas początkowych...*, s. 146.

1	2	3	4
Twórcza	konkretny	manipulacyjno-ruchowa	samodzielne projektowanie, tworzenie, konstruowanie kompozycji przestrzennych, np. projektowanie wzorów posadzki, budowanie modeli figur geometrycznych z wykorzystaniem schematów (np. puzzli)
		słowna	podawanie opisów słownych do sytuacji konkretnej, układanie zdań tekstowych do np. scenek
		umysłowa	odkrywanie reguł, formułowanie uogólnień, odkrywanie związków matematycznych
	graficzny	manipulacyjno-ruchowa	tworzenie żywych obrazów-schematów według pomysłu dzieci, schematyzowanie wybranej sytuacji konkretnej, odtwarzanie ruchem, gestem schematów matematycznych
		słowna	formułowanie tekstów do podanych schematów graficznych, interpretowanie danych na diagramach, w tabelach, przekształcanie tekstu matematycznego przedstawionego słownie na formę graficzną
		umysłowa	projektowanie krzyżówek i łamigłówek ujętych w formie graficznej (plątaninki matematyczne, kwadraty logiczne), schematyzowanie sytuacji konkretnych
	symboliczny	manipulacyjno-ruchowa	wykonywanie pomiarów (np. długości, masy, temperatury) z wykorzystaniem umownych jednostek, określanie, nazywanie i obmyślanie skrótów tych jednostek
		słowna	objaśnianie wzorów, tabel, schematów, podawanie przykładów ich zastosowania, zmiana struktury językowej zadania
		umysłowa	układanie i rozwiązywanie zadań matematycznych o niestandardowym charakterze, projektowanie gier i zabaw dydaktycznych

Źródło: opracowanie własne na podstawie E. Kozak-Czyżewska[93].

Autorka dokonuje podziału aktywności matematycznej na odtwórczą i twórczą. W zaprezentowanej klasyfikacji znamienne jest to, że większość wymienionych aktywności o charakterze odtwórczym akcentuje uczenie się przez naśladownictwo, reprodukowanie, uczenie się reaktywne, np. uczniowie werbalizują własne działania i efekty wykonywanych zadań, doskonalą przechodzenie z reprezentacji enaktywnej i ikonicznej na symboliczną, zaś w trybie twórczym dominują działania o charakterze spontanicznym, uczenie się przez odkrywanie i przeżywanie.

Wymienione aktywności są dostępne uczniowi na każdym poziomie nauczania, ale mogą się ujawniać lub pozostać w sferze postulatów w zależności od organizacji procesu nauczania–uczenia się matematyki, zakresu stosowanych przez nauczyciela metod aktywizujących, które sprzyjają ujawnianiu się matematycznych aktywności i matematyzowaniu. Badacze podkreślają bowiem:

> [...] podstawową składową aktywności matematycznej jest niespotykana w innych dziedzinach życia i nauki **czynność matematyzowania**. Charakteryzuje się ją jako porządkowanie rzeczywistości środkami matematyki[94].

93 *Ibidem*.

94 G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I–III,* Wszechnica Świętokrzyska, Kielce 2004, s. 32. J. Filip, T. Rams, *Dziecko...*, s. 42, podkr. B. B.-K.

U schyłku lat 70. XX wieku Z. Krygowska wskazała na matematyzowanie, obok dostrzegania i wykorzystywania analogii, schematyzowania, dedukowania i algorytmizowania, jako ważny element myślenia matematycznego (dokładniej charakteryzuję to pojęcie w podrozdz. 4.2)[95].

Jak wyjaśnia Z. Krygowska:

> [...] matematyzacją w nauczaniu będziemy nazywać bądź 1° konstrukcję matematycznego schematu dla jakiegoś układu stosunków, ujętego przez analizę rzeczywistej, wyobrażonej lub już abstrakcyjnej sytuacji, lub sprecyzowanego w innej dziedzinie pojęć, np. w innej nauce, bądź 2° konstrukcję jeszcze na wpół poglądowego schematu myślowego, który w dalszym ciągu nauki mógłby być przekształcony i włączony do pełnego już schematu matematycznego [...] Uczeń, rozwiązując zadanie matematyczne, matematyzuje życiową sytuację określoną warunkami tego zadania[96].

Przejawem matematyzowania są dostrzeganie, tworzenie i opisywanie regularności, opisywanie słowami, rysunkiem, schematem graficznym, posługiwanie się figurami przy przedstawianiu rysunkiem lub schematem realnej sytuacji, badania, obliczenia miarowe[97]. Są to wiodące drogi kształtowania się w umysłach dziecięcych pojęć geometrycznych.

Matematyzacją wstępną, prymitywną, niezwykle ważną dla zaistnienia tej właściwej, określić można konstrukcję schematu myślowego jakiegoś układu rzeczywistych stosunków, którego nie można uznać jeszcze za schemat matematyczny włączony do teorii matematycznej, ale jego konstrukcja jest od początku ukierunkowana na tę właściwą, późniejszą matematyzację. Przejawia się ona w wyrażaniu przez dziecko wczesnych doświadczeń i intuicji w jeszcze może naiwnym języku. Z punktu widzenia praktyki propedeutyki geometrii niezwykle ważna jest rola nauczyciela w dokonującym się procesie wstępnej schematyzacji stosunków przestrzennych. Przykładowo z nazwą *kwadrat* na etapie początkowej edukacji geometrycznej dziecko wiąże pewne wyobrażenie, które nie jest pojęciem matematycznym, ale jest pewnym myślowym schematem w sensie określonym przez A. Rubinsteina, wyobrażeniem-schematem, które, z jednej strony, „przechodzą w pojęcia, z drugiej – odtwarzają w obrazach wspomnieniowych indywidualne spostrzeżenia"[98]. Nauczyciel musi tu pamiętać, że w działaniach edukacyjnych nie można wprowadzać pojęć geometrycznych taką samą drogą, jak wprowadza się pojęcia np. przyrodnicze. Nie jest właściwe nazywanie przez niego drewnianego

---

95 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2.

96 Ead., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, s. 48–49.

97 E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *Dziecięca matematyka. Książka dla rodziców i nauczycieli,* WSiP, Warszawa 1997, s. 125.

98 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, s. 50.

modelu prostopadłościanem, ale za to właściwe jest prowokowanie dzieci do wykonywania konkretnych pomiarów i konstrukcji, badania przestrzeni geometrycznej, eksperymentowania i wyciągania wniosków. W takich działaniach sensowne jest posługiwanie się określeniem: ten klocek jest trójkątny, ta płyta jest okrągła, ma kształt koła. W tym świetle nauczyciel powinien zważać na język, jakim się posługuje, stawiając dzieciom zadania i wyzwalając ich aktywność geometryczną,

> [...] niedopuszczalne jest przy tym pomieszanie w szkolnym nauczaniu dwóch odrębnych zupełnie rzeczy, rzeczywistych przedmiotów i abstrakcyjnych – tylko pomyślanych – figur. Przykładowo w odniesieniu do zadania matematycznego, typu: wykreślić za pomocą ekierki równoległą do prostej, przechodzącą przez dany punkt, pojawia się pytanie: Jak można – za pomocą ekierki, tzn. za pomocą przyrządu z drewna, który istnieje, który znamy, wykonywać operacje na prostych abstrakcyjnych, na płaszczyźnie abstrakcyjnej, takiej jak ta, którą opisuje aksjomat[99].

Obiekty abstrakcyjne, pojęcia geometryczne istnieją bowiem tylko w umysłach ludzi, w realnym życiu dzieci badają konkretne przedmioty, manipulują, np. pudełkami, piłkami, wałkami, płytkami – w ten sposób dokonują spostrzeżeń, rozróżniają kształty, poznają właściwości przedmiotów, używają nazw.

Jak podkreśla Z. Krygowska[100], z punktu widzenia nauczania matematyki ważne jest, z jakich spostrzeżeń wywodzą się pierwsze, poglądowe wyobrażenia związane z opracowywanym pojęciem, jakie doświadczenia przyczyniają się do budowania obrazu pojęcia. Uznaje, że proces matematyzowania należy rozpocząć możliwie najwcześniej, w sposób jak najbardziej naturalny, wykorzystując sytuacje realne i łącząc je z innymi obszarami aktywności dziecka[101]. G. Treliński[102] wyjaśnia, że dziecko tylko wówczas będzie rozumiało świat, prawa nim rządzące oraz dostrzeże sens podejmowanych działań, gdy to samo zdarzenie, zjawisko czy przeżycie wyrazi dostępnymi mu środkami, w tym przypadku środkami matematyki, oraz podejmie próbę ich opisywania językiem właściwym tej dziedzinie. Uważa, że od samego początku edukacja matematyczna powinna być wtopiona w system nauczania zintegrowanego, powinna być powiązana z innymi obszarami aktywności ucznia, odnosić się do życia codziennego, wyzwalać aktywność matematyczną i umożliwiać pełne kształtowanie jego kompetencji wyznaczonych przez *Podstawę programową* i potrzeby życia codziennego.

---

99 Cytat z odczytu M. Frécheta wygłoszonego na kongresie poświęconym podstawom i metodzie nauk matematycznych w Zurychu w 1939 roku za: Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, s. 52.

100 *Ibidem.*

101 *Ibid*, s. 79.

102 G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I–III*, s. 33.

3.4. AKTYWNOŚĆ GEOMETRYCZNA I POTRZEBA AKTYWIZOWANIA

Zachęta J. S. Brunera do tego, by wprowadzać nowe zagadnienia, gdy dziecko jest gotowe na ich przyjęcie, pozwala już w przedszkolu podejmować pierwsze próby formalnego kształtowania pojęć geometrycznych i wyposażania dzieci w odpowiednie, niezbędne intuicje. Dyspozycje małych dzieci uznawane są w tym wieku jako bardzo wysokie, ale pojawia się także trudność, wynikająca z tego, że abstrakcyjne obiekty geometryczne istnieją tylko w ludzkich umysłach i wszelkie próby ich materializacji są sztuczne i umowne[103]. Ponadto proces nauczania –uczenia się, poza tym, że może być źródłem przyjemności, ma być także przydatny, a uczenie się „powinno nie tylko dokądś zaprowadzić, lecz i ułatwić ten marsz naprzód"[104]. Dlatego w niniejszym rozdziale czytelnik powinien znaleźć odpowiedzi na pytania: jakie aktywności należą do geometrycznych?, Jak ułatwić dziecku marsz w kierunku geometrii bardziej złożonej?, Jaki styl nauczania jest najbardziej adekwatny w procesie edukacji geometrycznej?

Aktywność uczącego się, jako warunek konieczny w kształceniu matematycznym, odnosi się także do geometrii, dlatego też badacze próbują wskazywać i określać rodzaje aktywności, które wydają się szczególnie ważne w budzeniu intuicji i budowaniu wiedzy geometrycznej. Podstawowy postulat, przyświecający tym działaniom, jest następujący:

> Nauczanie geometrii powinno mieć charakter poglądowo-intuicyjny, opierać się na czynnej obserwacji i możliwości eksperymentowania, bowiem myślenie dziecka w tym okresie rozwojowym oparte jest na bezpośrednim manipulowaniu, spostrzeganiu i wyobrażeniach, a najlepszym sposobem kształtowania pojęć geometrycznych jest własne działanie ucznia na materiale konkretnym[105].

Aktywność geometryczną można ujmować wąsko lub szeroko. W znaczeniu szerszym opisuje się ją jako „różnorodne zajęcia w szkole i poza szkołą, tak ukierunkowane, by dzieci same zdobywały doświadczenia niezbędne w dalszej nauce oraz próbowały opisywać swe obserwacje i wyciągać z nich wnioski"[106].

---

[103] R. Reclik, *Wspieranie aktywności geometrycznej dzieci w młodszym wieku szkolnym* [w:] W. Puślecki (red.), *Wspieranie rozwoju dzieci w procesie wczesnej edukacji* Wyd. DSWE TWP, Wrocław 2008, s. 272.

[104] J. S. Bruner, *Proces kształcenia*, s. 22.

[105] R. Reclik, *Wspieranie aktywności geometrycznej...*, s. 272–273.

[106] Za: R. Reclik, *ibid*., s. 272.

W wąskim ujęciu na aktywność geometryczną składają się aktywności poznawcze, takie jak:

- obserwowanie, czyli percypowanie, koncentrowanie uwagi, zauważanie (które zawsze wiąże się z koncentracją uwagi) i przekazywaniem do pamięci trwałej;
- manipulowanie, działanie rękami na fizycznych modelach obiektów geometrycznych lub zastępnikach;
- badanie, analizowanie, wnikanie – identyfikowanie obiektów, ich części, relacji i struktury przedmiotów badań;
- werbalizowanie, słowne opisywanie obiektów, sytuacji geometrycznych, własnych działań oraz tego wszystkiego, co jest przedmiotem badania;
- konstruowanie, robienie modelu obiektu geometrycznego z odpowiednich materiałów, klocków lub za pomocą rysunków;
- kreowanie, tworzenie nieznanych obiektów lub sytuacji geometrycznych[107].

Mimo różnego, szerokiego bądź wąskiego, ujęcia aktywności geometrycznej na etapie wczesnej edukacji badacze wskazują na wiele korzyści płynących z organizowania dzieciom działań, w toku których kształtują się pojęcia geometryczne. Z. Semadeni na przykład podaje:

> [...] geometria stanowi ważny element edukacji wczesnoszkolnej, rozwija bowiem wyobraźnię ucznia, wyrabia spostrzegawczość i szybką orientację, uczy logicznego myślenia, wyrabia staranność i dokładność, pobudza jego aktywność twórczą[108].

L. Garding uzupełnia, że geometria jest dziedziną „sprzyjającą wielostronnej aktywności uczniów, zorientowaną na doświadczenia przestrzenne, rozwijaną intuicyjnie i porządkowaną przez pewne reguły".

Aby takie cele zostały osiągnięte, przed nauczycielem stają zadania aktywizowania uczniów do podejmowania aktywności matematycznych i geometrycznych, czyli organizowanie „działań dydaktycznych i wychowawczych, które umożliwiają zwiększenie poziomu aktywności uczniów, a szczególnie w rozwiązywaniu problemów i wykonywaniu działań praktycznych"[109]. Okazuje się, że nie jest to łatwa działalność, bo, jak wiadomo, w każdej sytuacji edukacyjnej działa wiele zmiennych różnicujących efekty pracy. Przykładowo J. Filip i T. Rams[110] wymienią trzy główne zmienne mające wpływ na aktywizowanie uczniów. Piszą, że o aktywności ucznia w procesie nauczania decydują co najmniej trzy czynniki: program nauczania, metody nauczania i atmosfera pracy. Dwa pierwsze decydują o tym, czy uczeń

---

107 J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym*, s. 21.
108 Za: R. Reclik, *Wspieranie aktywności geometrycznej...*, s. 272.
109 J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym,* s. 21.
110 J. Filip, T. Rams, *Dziecko...*, s. 61, 142–145.

może być aktywny, ostatni o tym, czy chce być aktywny. Program w edukacji dziecka ma do spełnienia współcześnie nieco inne funkcje, nie zniewala nauczyciela i dzieci, nie podporządkowuje ich wymogom arbitralnego i zuniformizowanego toku, ale stanowi, czy może stanowić, źródło twórczej inspiracji wielokierunkowej aktywności poznawczej, społecznej, nauczyciela i dzieci. W opinii teoretyków pedagogiki powinnością edukacyjną nauczyciela jest pedagogiczna interpretacja programu w interesie rozwijającego się dziecka, a nie schematyczna jego realizacja. Nauczyciel nie powinien programu realizować, ale korzystać z niego, jako z narzędzia umożliwiającego inicjowanie nowych, różnorakich aktywności. Program nie może być tylko dokumentem urzędowym, ale źródłem pomysłów do efektywnej pracy z dziećmi[111]. Te pomysły mogą iść w kierunku wychodzenia poza zakres obowiązujących treści wyznaczonych przez podstawę programową, poszukiwania nowych metod i twórczych rozwiązań.

W odniesieniu do metod – drugiego czynnika wymienianego przez J. Filipa i T. Ramsa, J. Tocki wypowiada się, że wymóg *matematycznej aktywizacji ucznia* jest współcześnie kanonem nauczania opartym na dydaktycznych technologiach, takich jak kształcenie we współpracy, metoda projektów, teczka ucznia, nauczanie zindywidualizowane i zróżnicowane.

> Technologie te są humanistyczne, ukierunkowane na wyzwalanie i wspomaganie aktywności ucznia, pozwalają zachować cały wartościowy dorobek dydaktyki ogólnej, psychologii kształcenia oraz współczesnych dydaktyk przedmiotowych[112].

Innego zdania jest J. Nowik, który uznaje, że istotą aktywizowania jest często nie tyle metoda, osoba nauczyciela i styl jego pracy organizujący proces dydaktyczny. Każda metoda może być bowiem realizowana w sposób czynny lub bierny[113]. Nauczyciel jest moderatorem aktywności, on stwarza warunki do samodzielnych, indywidualnych działań, zabawę badawczą, poszukiwania, kieruje myśleniem dzieci, podpowiada, weryfikuje wnioski, umiejętnie steruje uczeniem się innych osób, jego aktywność jest w głównej mierze działalnością koncepcyjną, polegającą na organizowaniu uczenia się innych osób przez organizowanie ich czynności.

---

111 B. Bilewicz-Kuźnia, T. Parczewska, *Program jako strategia stymulacji wielokierunkowej aktywności nauczyciela* i dzieci [w:] I. Adamek, M. Grochowalska, E. Żmijewska (red.), *Relacje i konteksty (w) edukacji elementarnej*, Wyd. Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków 2010, s. 120–127.

112 J. Tocki, *Nauczanie matematyki czy edukacja matematyczna* [w:] M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wyd. AŚ, Kielce 2006, s. 32.

113 J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym*, s. 21.

Nauczyciele jednak w różny sposób rozumieją stawiane przed nimi zadania oraz własną powinność. Grupa ta jest wewnętrznie zróżnicowana pod względem stylu nauczania, osobowości, indywidualnych zainteresowań, motywacji, percepcji i oczekiwań. Wymienione czynniki są bardzo znaczące i wpływają na zakres i poziom aktywizowania uczniów. Przykładowo w odniesieniu do nauczania G. D. Fenstermacher i J. F. Soltis wyróżniają trzy główne style pracy nauczyciela: kierowniczy, terapeutyczny i wyzwalający[114]. Pierwszy jest nastawiony na efektywne działanie nauczyciela, który realizuje sprawdzone, zweryfikowane wzorce postępowania dydaktycznego i doprowadza uczniów do coraz wyższych osiągnięć przez stawianie im celowo i precyzyjnie dobranych zadań, sprawdzanie ich w kontekście wymagań programowych. Drugi styl akcentuje pomaganie uczniowi, realizowanie jego potrzeb, poznanie go i rozumienie. Trzeci zaś akcentuje odkrywanie i twórczość wychowanka, sprzyja uwolnieniu umysłów, samodzielnemu dochodzeniu do wiedzy, pobudza krytyczną świadomość i emancypację, jego cechą jest atmosfera swobody, akceptacji, wolności dzielenia wypowiedzi z nauczycielem i kolegami. Inni badacze, kierując się innymi kryteriami, wymieniają inne style edukacyjnego wspierania. D. Klus-Stańska określa na przykład styl funkcjonalistyczno-behawiorystyczny (wspierać to kierować), humanistyczno-adaptacyjny (wspierać to uczyć być sobą), konstruktywistyczno-rozwojowy (wspierać to organizować środowisko edukacyjne), konstruktywistyczno-społeczny (wspierać to pomagać w osiąganiu wyższych poziomów rozwojowych przez np. pracę w grupie), krytyczno-emancypacyjny (wspierać to emancypować do samodzielnego myślenia)[115]. J. Bałachowicz natomiast wymienia styl instrukcyjny, partycypacyjny, negocjacyjny i delegujący[116].

Z punktu widzenia edukacji geometrycznej wydaje się, że style partycypacyjny oraz konstruktywistyczne (społeczny i rozwojowy), w których nauczyciel dopuszcza dziecko do kierowania własną aktywnością, które stwarzają warunki doświadczania kontroli zewnętrznej, ale też doświadczania zachęcania, motywowania, dopuszczania do współkierowania czy samoregulacji, są najbardziej stymulujące rozwojowo. Nauczyciel pracujący według takich strategii uznaje gotowość podmiotową dziecka do podjęcia działań samodzielnie, w parze z innym dzieckiem, w grupie, kiedy zadanie jest „na miarę ucznia" i może on próbować swoich sił.

114 G. D. Fenstermacher, J. F. Soltis, *Style nauczania*, WSiP, Warszawa 2000.

115 D. Klus-Stańska, *Konteksty teoretyczne nadawania znaczeń przez dzieci. Wokół pytań o rozumienie pedagogicznego wsparcia* [w:] W. Puślecki (red.), *Wspieranie rozwoju dzieci w procesie wczesnej edukacji*, Wyd. Naukowe Dolnośląskiej Szkoły Wyższej, Wrocław 2008, s. 41–44.

116 J. Bałachowicz, *Kategoria podmiotowości jako wyznacznik przemian stylu pracy współczesnego nauczyciela* [w:] I. Adamek, E. Żmijewska (red.), *Nauczyciel w systemie edukacyjnym teraźniejszość i przyszłość*, Wyd. Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków 2009, s. 14–16.

Jednak, jak podkreślają J. Grochulski i J. Ruszczyc, wyniki nauczania i wnioski z badań wskazują na istnienie problemu „zdegenerowanego formalizmu", którego przyczyny należy upatrywać w preferowanym często stylu nauczania, opartym na recepcji w postaci gotowej matematyki[117]. Szkoda, bo aktywna postawa uczniów w procesie nauczania matematyki stwarza szansę realizacji szeroko zakrojonych celów matematycznych, będących istotą edukacji matematycznej. Przy realizacji zadania, jakim jest organizowanie i prowadzenie tej edukacji, wyłania się także jako istotna kwestia postaw i opinii nauczycieli na temat nauczania matematyki, co jednocześnie stanowi zmienną pośredniczącą, mającą wpływ na zakres i jakość aktywizowania uczniów. Dla przykładu współcześni badacze klasyfikują nauczycieli matematyki pod względem prezentowanych postaw na: pesymistów, optymistów edukacyjnych, dyktatorów, demokratów, formalistów i pragmatyków[118]. Taki opis pozwala określić styl zachowania, sposób realizacji przez nauczyciela powierzonych mu zadań edukacyjnych i wynikający z niego dobór metod i strategii postępowania pedagogicznego, którego celem jest edukacja matematyczna i geometryczna wychowanków.

W odniesieniu do nauczania–uczenia się matematyki G. Treliński[119] definiuje trzy style widoczne w praktyce szkolnej. Nazywa je strategiami: *serwowania herbaty w torebkach, posługiwania się wytrychem* i *chodzenia po świeżych śladach.* Pierwszy styl związany jest z koncentrowaniem się nauczyciela na wyjaśnieniach słownych, demonstrowaniem reguł postępowania i prezentowaniem rozwiązań w dojrzałej matematycznie, symbolicznej formie. W toku rozwiązywania zadań nauczyciel akcentuje bardziej wynik niż drogę dochodzenia do rozwiązania, uczniowie nie mają czasu na dochodzenie do konkluzji i tworzenia tzw. swojej matematyki. Po kilku szybkich przykładach następuje wprowadzenie nowego pojęcia, zasady lub reguły, matematykę oddziela się od rzeczywistości. Jak podaje G. Treliński, nauczyciel pracujący w takim stylu: „eliminuje osobiste działanie dziecka, preferuje pamięć oraz prowadzi do żonglowania regułkami, których ono nie rozumie"[120]. Porównanie uczenia się matematyki do *serwowania herbaty w torebkach* wynika

---

117 J. Grochulski, H. Ruszczyk, *Aktywizacja uczniów w procesie nauczania matematyki* [w:] M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2006, s. 254.

118 M. Dąbrowski, M. Żytko, *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Raport z badania ilościowego,* cz. I, Badanie prowadzone w ramach projektu realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną, współfinansowanego przez Europejski Fundusz Społeczny, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2007, s. 184–188.

119 G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I–III,* Wszechnica Świętokrzyska, Kielce 2004, 18–25.

120 *Ibid.,* s. 22.

z tego, że nauczyciel, wybierając (zaparzając) izolowany, sformalizowany pakiet edukacyjny, niejako zaparza kreatywne umysły uczniów.

Posługiwanie się wytrychem to strategia, w której akcent przenosi się na badanie i opisywanie językiem matematyki sytuacji realnych, dostrzeganie, formułowanie i rozwiązywanie zadań.

> Wiedza ucznia o pojęciach matematycznych i ich własnościach ma swoją genezę w świecie rzeczywistym i powstaje w efekcie wydzielania zbiorów, reprezentowania ich rysunkiem, schematem czy układem zastępników, ich porządkowania, przeliczania, szacowania, mierzenia, porównania przedmiotów czy układów itp., dalej następuje opis werbalny skierowany na matematyzację otrzymanych obiektów i wreszcie opis symboliczny[121].

Zbudowane w taki sposób pojęcie, schematy posługiwania się nim oraz język są wykorzystywane następnie do rozwiązywania zadań, a kolejne badania różnych sytuacji zadaniowych umożliwiają tworzenie bardziej złożonych reguł i dokonywanie na nich operacji. Język matematyki staje się wówczas znakomitym sposobem opisywania i badania związków między obiektami, zjawiskami oraz jest narzędziem do rozwiązywania zadań. W takiej strategii postępowania warte podkreślenia jest to, że źródłem czynności myślowych ucznia są realne sytuacje, które nauczyciel i uczeń wiążą z innymi obszarami wiedzy, np. językiem codziennym, przyrodą, plastyką, muzyką, zabawą itp. Istotą jego działań są rzeczywiste działania na przedmiotach, badanie, eksperymentowanie, prowadzenie rozmowy. Kluczowe jest opanowanie uniwersalnie przydatnych strategii postępowania, umożliwiających radzenie sobie w różnych sytuacjach, co można przyrównać do wyposażenia go w jeden lub kilka uniwersalnych wytrychów, którymi można otwierać zamki, zamiast dawania mu narzędzi, które otwierają tylko konkretne drzwi (zadania matematyczne).

Styl edukacyjny, zwany *chodzeniem po świeżych śladach*, określa strategię, która występuje w toku osobistego działania ucznia nakierowanego na tworzenie pojęć, twierdzeń, metod i rozumowań matematycznych, kolejne rozwiązywanie przez ucznia zadań taki ślad wzmacnia i prowadzi do powstania ścieżki wiodącej do matematyki. W takim rozumieniu matematyka stanowi otwarty system (przedmiot), konstruowany i rozwijany indywidualnie przez każdego ucznia, którego działanie wiąże się z analizowaniem przykładów, uogólnianiem, obmyślaniem algorytmów, zapisywaniem, przeprowadzaniem rozumowań, sprawdzaniem zależności.

---

121 G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym...*, s. 23.

> Uczenie się matematyki w tym aspekcie eksponuje osobistą aktywność każdej osoby, m.in. eksperymentowanie, poszukiwanie prawidłowości, tworzenie wygodnych sposobów postępowania (algorytmów), rozwiązań zadań, wizualizowanie treści abstrakcyjnych, komunikowanie się, poszukiwanie, przetwarzanie, formalizowanie informacji, matematyzowanie, definiowanie, dowodzenie[122].

Mimo że trudno mówić o istnieniu tzw. czystych stylów nauczania, postaw czy strategii typologie te pomagają określić pewne modele postępowania nauczycielskiego, generujące aktywność lub bierność poznawczą ucznia. Pozwalają tym samym zwrócić uwagę nauczyciela na inne możliwe (poza dominującymi) stosowane przez niego strategie nauczania. Kwestia stymulującego rozwojowo stylu pracy nauczyciela w kontekście postulatu aktywności dziecka staje się bowiem czynnikiem determinującym skuteczność poczynań nauczyciela w zakresie aktywizowania ucznia, jeśli chcemy, by w procesie uczenia się i nauczania centralne miejsce zajęła działalność wychowanka.

* * *

Z przedstawionych rozważań na temat ujmowania przez dzieci świata geometrii wypływają następujące wnioski:

- Do rozumienia świata geometrii, jako matematycznej struktury, wiedzie droga od przestrzennych doświadczeń dziecka. Dorosły, towarzysząc dziecku w tej drodze, powinien być świadomy, że dziecko buduje w swoim umyśle pojęcia matematyczne za pomocą różnych czynności i procedur, a jego aktywność umysłowa wiąże się z konstruowaniem schematów określonych czynności fizycznych, wyobrażonych i abstrakcyjnych.
- Proces kształtowania się pojęć matematycznych przebiega etapowo i ma charakter indywidualny. Badacze wyróżniają w tym procesie stadia rozwojowe, np. etap braku zdolności definiowania pojęć, poziom przejściowy oraz etap operacyjnego rozumienia pojęć geometrycznych. Używają tym samym zróżnicowanej terminologii. Zgodnie z teorią M. Hejný'ego pierwszym, najważniejszym etapem na tej drodze jest poziom przedpojęciowy, w którym kształt traktowany jest jako cecha przedmiotu. Kolejnym, ważnym etapem jest poziom pojęć personalnych, etap odkrycia wyizolowanego, które nie istnieje jako cecha. Dopiero na etapie trzecim, jakim jest poziom pojęć abstrakcyjnych, w umyśle dziecka ugruntowuje się idea pojęcia geometrycznego. Nauczyciel powinien mieć na względzie tę etapowość i przestrzegać wytycznych teorii M. Hejný'ego lub P. van Hielego.

---

122 *Ibid.*, s. 26.

- Kompetencje matematyczne zdobywane przez dziecko na pierwszym, przeddefinicyjnym etapie określa się terminami: *wiedza okołopojęciowa, intuicja pojęcia, pole pojęciowe*[123], *obraz pojęcia, portret pojęcia, obiekt myślowy* czy *rama pojęcia*[124].
- Jak akcentuje P. van Hiele, przejście na kolejny poziom myślenia nie może dokonać się spontanicznie, ale pod wpływem dobrze zorganizowanego procesu dydaktycznego, w toku którego dorosły zapewnia materiały i zadania, obserwuje, na jakim dziecko jest poziomie i czy jest gotowe przejść wyżej[125]. Stąd płynie ważna, organizowana celowo potrzeba przygotowania dzieci do przejścia na drugi i trzeci poziom myślenia wg P. van Hielego.
- Badacze są zgodni, że w pełni ukształtowane pojęcie musi być utrzymane w konwencji operacyjnej. Jak podkreśla G. Treliński, możemy przyjąć: „że u danej osoby wytworzył się obraz pojęcia matematycznego, gdy osoba ta rozumie je tak dobrze, że potrafi je sensownie wykorzystać w rozmaitych sytuacjach zadaniowych oraz rozumowaniach, potrafi wyrażać je w różnych językach"[126].
- Mimo wysokiego stopnia abstrakcji matematyki jako nauki pojęcia geometryczne tworzą się w umyśle przez osobistą działalność każdej osoby, która doświadcza, a nie przyswaja czy uczy się na pamięć. Jest to proces o nieustalonych z góry ramach czasowych, dokonujący się wieloma drogami, takimi jak wprowadzanie nowego pojęcia przez taką organizację aktywności, że dziecko samo to pojęcie przy dyskretnej pomocy nauczyciela konstruuje, a następnie definiuje; lub/i wprowadzanie nowego pojęcia za pomocą definicji podanej przez nauczyciela lub podręcznik, ilustrowanej odpowiednimi przykładami[127]. Obydwie te drogi są jednakowo ważne i błędem dydaktycznym byłoby pomijanie którejś z nich[128]. Należy przy tym zaznaczyć, że wybór sposobu postępowania zawsze zależy od wielu czynników, takich jak: charakter pojęcia, stopień jego abstrakcji, podmiot oddziaływań, cel, warunki zewnętrzne, poziom edukacyjny, oraz pamiętać, że sama znajomość przez dziecko adekwatnych słów związanych z danym pojęciem czy skuteczność w rozwiązywaniu zadań nie jest tożsama z zakończeniem procesu budowania pojęcia matematycznego.

---

123 *Pole pojęciowe* – zbiór sytuacji, których opanowanie wymaga istnienia wielu związków danego pojęcia z innymi pojęciami za: G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym...*, s. 26.

124 J. Konior, *Pojęcie matematyczne...*, s. 25.

125 G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna, 3M...*, s. 104.

126 *Ibid.*, s. 30.

127 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. III, WSiP, Warszawa 1977, s. 79.

128 M. Klakla, *Procesy psychiczne związane z procesem pojęć i struktur* [w:] J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. III, Płock 2002, s. 199, 200.

- Naukowe pojęcie matematyczne jest strukturą złożoną, o głębokim charakterze, zespalającą w myśli różnorodne doświadczenia zgromadzone w kontakcie z różnym materiałem. Wychowawca powinien pomagać dziecku bardziej koncentrować się w tym procesie na rozwijaniu u niego poczucia rozumienia sensu własnych działań, niż na egzekwowaniu wymagań. Działania te powinny odbywać się w relacji wzajemnego dialogu między nauczycielem i uczniem, nauczyciel powinien stwarzać okazje do indywidualnego odkrywania i badania, wspierać wysiłki poznawcze uczącego się. Warto przy tym uwzględniać wiedzę i indywidualne doświadczenia dziecka, promować myślenie narracyjne i osobiste, dziecięce interpretacje świata matematyki, z uwzględnieniem intuicji i skojarzeń, eksponować pewne, często nieuświadomione przez dziecko działania, prowokować do aktywnej komunikacji o matematycznym charakterze. Może na przykład zadawać pytania dotyczące sposobów dojścia do wiedzy (np. Wyjaśnij, jak to można zrobić?, Opowiedz o tym, jak do tego doszedłeś?, W jaki sposób posłużysz się...?, Pokaż, jak to można sprawdzić?, Jak oceniasz ten sposób rozwiązania zadania?, Kto ma inny pomysł?). Jeśli nauczyciel akcentuje i uznaje za jedyny słuszny pewien określony sposób wykonania zadania (Popatrzcie, jak to się robi), formułuje zasadnicze reguły, preferuje podejście formalne i nie prowokuje do negocjowania znaczeń, wówczas proces budowania pojęcia znacznie się ogranicza i może przyczynić się do ukształtowania poczucia bezradności matematycznej[129], co wyjaśniam dokładniej w kolejnym rozdziale.

129 G. Treliński, *Stymulowanie aktywności – przeciwdziałanie bezradności matematycznej ucznia...*, s. 49.

4. INDYWIDUALNE OBLICZA DYSPOZYCJI I OSIĄGNIĘĆ ROZWOJOWYCH DZIECI W ZAKRESIE GEOMETRII

Oblicza osiągnięć i trudności matematycznych są zróżnicowane, a czynników rozwoju należy szukać w determinantach genetycznych, środowiskowych, wychowaniu i aktywności własnej jednostki. Gdy dzieci nie mają kłopotów z uczeniem się matematyki, wiążemy to z faktem, że posiadają przeciętne zdolności i określamy je jako osoby względnie sobie radzące, zaś te, które potrafią szybko i bezbłędnie rozwiązywać trudne zdania, nieraz wykraczające poza program nauczania, określa się jako uzdolnione i rozpatruje ich zdolności w kategoriach uzdolnień specjalnych[1]. W niniejszym rozdziale czytelnik znajdzie wskaźniki dojrzałości do uczenia się matematyki, definicję myślenia, bezmyślności, uzdolnień i trudności matematycznych.

4.1. DOJRZAŁOŚĆ DO UCZENIA SIĘ MATEMATYKI

W ostatnich latach pojawiło się wiele nowych pojęć wyjaśniających funkcjonowanie matematyczne dziecka i określających istotę jego matematycznych zdolności oraz trudności i niepowodzeń.

Zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej dziecko podejmujące naukę szkolną powinno być odpowiednio dojrzałe do uczenia się matematyki. Dojrzałość ta

---

1 M. Pisarski, *Matematyka dla naszych dzieci,* Wyd. ECERI, Białystok 1992, s. 16.

jest elementem dojrzałości szkolnej, a jej wskaźniki uzależnione są od treści i metod nauczania matematyki, określonych w standardach nauczania i programach. R. Pawlak[2] dojrzałość matematyczną rozumie jako poziom rozwoju intelektualnego, emocjonalnego i społecznego, umożliwiający człowiekowi posługiwanie się matematyką. W tym obszarze mieści się matematyzowanie otaczającej rzeczywistości, budowanie i poszerzanie swojej wiedzy, odnajdywanie w różnych źródłach odpowiednich dla danej sytuacji modeli i narzędzi matematycznych, poprawne ich interpretowanie oraz praktyczne wykorzystanie.

Na dojrzałość do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych, według E. Gruszczyk-Kolczyńskiej, składają się:

1. Dziecięce liczenie: sprawne liczenie, zdolność rozróżniania liczenia błędnego od poprawnego, umiejętność wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania w zakresie 10 w pamięci lub na palcach.
2. Operacyjne rozumowanie na poziomie konkretnym w zakresie uznawania stałości ilości nieciągłych (zdolności do wnioskowania o równoliczności mimo obserwowanych zmian w układzie elementów porównywanych zbiorów), wyznaczanie konsekwentnych serii.
3. Zdolność do odrywania się od konkretów i posługiwanie się reprezentacjami symbolicznymi w zakresie: pojęć liczbowych (aspekt wzrokowo-symboliczny, działań arytmetycznych – formuła arytmetyczna i jej przekształcenie, schematu graficznego – grafy, tabele, rysunki).
4. Dojrzałość emocjonalna, pozytywne nastawienie do samodzielnego rozwiązywania zadań, odporność emocjonalna na sytuacje trudne intelektualnie, zdolność do kierowania swoim zachowaniem.
5. Zdolność do syntetyzowania oraz integrowania funkcji percepcyjno-motorycznych, która wyraża się w sprawnym odwzorowywaniu złożonych kształtów, rysowaniu i konstruowaniu[3].

Jeśli dziecko nie osiąga odpowiednich standardów rozwojowych, pojawiają się niepowodzenia szkolne zakłócające efektywność procesu dydaktyczno-wychowawczego, uwarunkowane często specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Wówczas należy szukać przyczyn tego zjawiska w obszarze intelektu i emocji. E. Gruszczyk-Kolczyńska wymienia cztery główne grupy przyczyn niepowodzeń w uczeniu się matematyki. Należą do nich:

– operacyjne rozumowanie, którego brak uniemożliwia zrozumienie i opanowanie podstawowych pojęć matematycznych;

---

[2] R. J. Pawlak, *Dojrzałość matematyczna. Trudności i przeszkody w posługiwaniu się matematyką,* Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 26, 2004, s. 289–231.

[3] E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki,* WSiP, Warszawa 1997, s. 18.

– zbyt powszechnie stosowane przez nauczyciela podające metody nauczania, blokujące aktywność matematyczną;
– zaburzenia rozwoju czynności percepcyjno-motorycznych oraz dynamiki nerwowej, w tym nadmierna ruchliwość, rozproszenie uwagi, pochopność myślenia i niezdolność doprowadzenia pracy do końca;
– zaburzenia w kształtowaniu obrazu własnego „ja” z takimi składnikami, jak: samoocena, poczucie własnej wartości, potrzeba osiągnięć i samodzielności. Zmiany zachodzące w osobowości dziecka pod wpływem przeżywania niepowodzeń E. Gruszczyk-Kolczyńska uznaje za główny czynnik *syndromu wyuczonej bezradności*[4].

Zarówno aspekty dojrzałości psychicznej do uczenia się matematyki, jak i grupy przyczyn trudności szkolnych w procesie uczenia się matematyki odnoszą się również do obszaru geometrii. Dojrzałość intelektualna, jako główny wskaźnik rozwojowy, wyznacza skuteczność szybkiego i sprawnego rozumowania w obszarze oderwanym od konkretów. Emocje decydują o podjęciu, kontynuowaniu i efektywnym zakończeniu pracy, a zrównoważenie procesów pobudzania i hamowania warunkuje powodzenie działań, które muszą wystąpić, by dziecko mogło z posiadanym bagażem doświadczeń wejść na wyższy, oderwany od konkretu poziom abstrakcyjnych geometrycznych obiektów.

4.2. MYŚLENIE I BEZMYŚLNOŚĆ MATEMATYCZNA

Myślenie cechuje swoista specyfika w zależności od tego, jaki jest jego materiał treściowy, na którym dokonują się operacje umysłowe, tj. analiza, porównywanie, synteza, abstrahowanie, uogólnianie. Przyjmując, że procesy myślenia wyznaczają efektywność poznawania świata matematyki i operowania prawami matematycznymi, badacze problemu precyzują specyficzny typ myślenia, które określają *myśleniem matematycznym*. W tym podrozdziale staram się przedstawić specyfikę takiego myślenia, charakteryzując także pojęcia krańcowo od niego odmienne, choć niewykluczające się, mianowicie zjawiska, takie jak: inercja mentalna i bezmyślność matematyczna.

Cechą charakterystyczną myślenia matematycznego jest to, że zawsze związane jest z działaniem, przyporządkowywaniem, porządkowaniem, przekształcaniem, odwzorowywaniem itp.; wymaga umiejętności analizowania i syntetyzowania oraz

4 A. Laskowski, *Tendencje w kształceniu matematycznym a niektóre „stare” przyczyny specyficznych trudności matematycznych...*, s. 75–76.

„przejawia się w łatwości zmiany toku myślenia, umiejętności oderwania się od sposobu rozwiązania nieprowadzącego do pożądanych wyników, w umiejętności znajdowania nowych sposobów rozwiązania”[5]. Pomaga w zrozumieniu siebie i świata. Zdaniem francuskiego matematyka G. Choqueta: „Wszelkie myślenie matematyczne składa się z cyklów większych lub mniejszych, w każdym z nich można, z grubsza rzecz biorąc, wyróżnić następujące stadia: obserwację, matematyzację, dedukcję i zastosowanie”[6]. Badacze podkreślają przy tym, że wszystkie wymienione stadia są tak samo istotne, gdyż nauczanie matematyki ograniczone do czystej dedukcji byłoby dla uczniów dydaktycznie niedostępne, a nawet niekorzystne.

W ujęciu formalnym, w dokumentach międzynarodowych spotykamy się z wyjaśnieniem następującymi:

> [...] myślenie matematyczne przejawia się w indywidualnej zdolności do rozpoznawania i zrozumienia roli, jaką matematyka odgrywa we współczesnym świecie, do formowania sądów opartych na matematycznym rozumowaniu oraz do wykorzystywania umiejętności matematycznych tam, gdzie wymagają tego potrzeby życia codziennego. Alfabetyzm w dziedzinie matematyki to wiedza i umiejętności niezbędne do efektywnego rozwiązywania problemów matematycznych powstających w różnych sytuacjach[7].

D. Klus-Stańska, charakteryzując specyfikę myślenia matematycznego młodszych uczniów, ujmuje je jako „zespół podejmowanych samodzielnie czynności umysłowych polegających na:

1) rozwiązywaniu zdań matematycznych i innych problemów matematycznych, a więc logicznej analizie treści matematycznej, jej identyfikacji oraz świadomym (kontrolowanym przez siebie, a nie przez nauczyciela) wyborze lub konstrukcji strategii jej rozwiązywania, a także na
2) poszukiwaniu tych problemów, czyli dostrzeganiu nowych relacji matematycznych i skłonności do matematyzacji rzeczywistości”[8].

Jak podkreśla Z. Krygowska:

> [...] myślenie matematyczne nie jest bierną kontemplacją danej nam a priori sytuacji, jest bardzo wyraźną aktywnością, wykonywaniem różnego typu czyn-

5 A. Tyl, *Plastyczność myślenia uczniów klas początkowych rozwiązujących matematyczne zadania tekstowe* [w:] A. Komorowska-Zielony (red.), *Twórcze działania przyrodnicze i matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Wyd. UG, Gdańsk 2008, s. 146.

6 Za: Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. II, s. 48.

7 *Kompetencje kluczowe. Realizacja koncepcji na poziomie szkolnictwa obowiązkowego*, EURIDYCE Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji, Warszawa 2005, s. 15.

8 D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów,* Wyd. Akad. Żak, Warszawa 2004, s. 19.

> ności. Te czynności mogą być początkowo jeszcze chaotyczne, mogą mieć na celu jakąś próbną tylko eksplorację tej sytuacji. Ale zawsze w niej działamy[9].

Badacze podpowiadają więc praktykom, że w stymulowaniu myślenia matematycznego niezbędne jest rozwijanie:
- ciekawości matematycznej (zamiast jedynie skrupulatności);
- zdolności do dyscyplinowania swojego myślenia (w miejsce kopiowania narzucanych kroków);
- umiejętności poszukiwania własnych strategii rozwiązań (a nie przypominania sobie cudzych)[10].

Formułują przy tym różne strategie postępowania. Jedna z nich, wypracowana przez P. P. Galperiana, obejmuje pięć faz i są to:
1) faza orientacyjna, polegająca na zapoznaniu się ze wzorem czynności dotyczących zadania, które ma być przez dziecko rozwiązane, oraz towarzyszącymi mu informacjami otrzymanymi od dorosłych;
2) wykonanie – całkowicie lub skrótowo – czynności na przedmiotach rzeczywistych bądź ich zastępnikach (materialnej reprezentacji, np. rysunkach, makietach);
3) wykonywanie czynności na przedmiotach wyobrażonych przez głośne operowanie odpowiednimi nazwami;
4) przejście od mowy głośnej do mowy cichej;
5) czynności umysłowe odbywające się bez uświadamiania sobie ich przebiegu[11].

W literaturze przedmiotu charakteryzuje się również pojęcia stojące w opozycji do myślenia matematycznego i matematycznego alfabetyzmu. Należy do nich termin *inercja mentalna*[12], *bezmyślność matematyczna*[13], *bezradność matematyczna*[14] czy *analfabetyzm matematyczny*[15]. Kategorii tych nie należy wiązać z cechą osoby (z udziałem jej woli lub bez) ani z rozwojowym nieopanowaniem kompetencji w zakresie matematyki z różnych powodów.

---

9 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. I, s. 84.

10 D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, s. 22–23.

11 J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym*, s. 14–15.

12 A. Tyl, *Plastyczność myślenia uczniów klas początkowych rozwiązujących matematyczne zadania tekstowe*, s. 136.

13 D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, s. 19.

14 G. Treliński, *Trzy przykłady, czyli o stymulowaniu i pielęgnowaniu bezradności matematycznej* [w:] M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wyd. AŚ, Kielce 2006, s. 65.

15 J. Seidel, M. Sobieszczyk, *Kosz i walizeczka, czyli o niektórych problemach edukacji matematycznej* [w:] H. Siwek (red.), *Efektywność kształcenia zintegrowanego. Implikacje dla teorii i praktyki*, WSP TWP, Katowice 2007, s. 286.

Inercja mentalna (łac. *inertia*) to bierne poddawanie się czemuś, bezczynność. W literaturze psychologicznej przykładam inercji jest efekt Einstellunga (nastawienia), polegający na korzystaniu podczas rozwiązywania zadań z powstałych nawyków i przez to nawykowym preferowaniu pewnych sposobów rozwiązań, stosowaniu sztywnych rozwiązań[16]. Efekt ten można wytłumaczyć prawidłowością, że umysł ludzi reaguje na całą sytuację bodźcową (na przykład na całą serię zadań) i ma tendencję do bezmyślnej mechanizacji w rozwiązywaniu problemów. I mimo to że zadania w serii różnią się między sobą, człowiek ma tendencję do rozwiązywania ich w utrwalony, nie zawsze łatwiejszy sposób.

W literaturze przedmiotu częściej pojawia się jednak określenie *bezmyślność* lub *bezradność matematyczna*. Jak podaje D. Klus-Stańska:

> [...] **bezmyślność** odnosi się niejako do choroby, którą zostali zarażeni przez nauczycieli uczniowie. Bezmyślność matematyczna przejawia się w niezdolności do wyjścia poza mechaniczne techniki obliczeniowe, postrzegane jako izolowane sprawności, oraz w nieumiejętności konstruowania własnych strategii postępowania w nowej sytuacji. Można ją kojarzyć z racjonalnością kalkulatora, któremu choć bezbłędnie przelicza, nie przypisujemy atrybutów myślenia[17].

G. Treliński „nieumiejętność radzenia sobie w różnych sytuacjach, charakterystycznych dla uczenia się elementów matematyki w klasach początkowych, nazywa bezradnością matematyczną"[18]. Cechą charakterystyczną bezradności jest to, że mimo podejmowanych przez ucznia czynności o charakterze intelektualnym działania jego nie prowadzą do „opanowania i kontrolowania sytuacji", uczeń nie może jej sprostać i nie radzi sobie z nią.

U dziecka, które przejawia matematyczną bezmyślność, obserwuje się mechaniczny charakter wykonywania czynności, jeśli nawet prawidłowo i pod dyktando nauczyciela, to jednak bez zrozumienia sensu działań, istoty i cech pojęcia. Dziecko takie jest przy tym aktywne matematycznie, nie jest bierne, ale jego zachowania nie prowadzą do założonego celu. Bezradność matematyczna, jak podkreśla G. Treliński, wiąże się z subiektywną oceną sytuacji zadaniowej, nie jest cechą trwałą i może być wyuczona lub nieuświadomiona[19]. Bezradność może być generowana przez styl nauczania, koncepcję przedmiotu i inne uwarunkowania

---

16 A. Tyl, *Plastyczność myślenia uczniów klas początkowych rozwiązujących matematyczne zadania tekstowe*, s. 136.

17 D. Klus-Stańska, A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, s. 19, podkr. B. B.-K.

18 G. Treliński, *Stymulowanie aktywności – przeciwdziałanie bezradności matematycznej ucznia*, s. 54.

19 *Ibid.*, s. 68.

uczenia się. Szczególnie bliskie jej są trzy rodzaje zjawisk pedagogicznych, takie jak:

– nauczanie oparte na przekazie informacji oraz operowaniu gotowymi regułami, czyli na *wiedzy deklaratywnej,* której zdobywanie słabo koreluje z aktywnością matematyczną;
– *kształtowanie pojęć inaczej*, polegające na podawaniu definicji, kilku przykładów i ograniczonej liczby zadań, bez podejmowania działań prowadzących do wytworzenia głębokiej idei pojęcia;
– *osiąganie w praktyce edukacyjnej celów doraźnych,* takich jak przyswojenie informacji (*Co to jest? Jak się nazywa? Ile wynosi?),* opanowanie sprawności typu algorytmicznego (*Jak to zrobisz?),* czy nabycie umiejętności rozwiązywania zadań wymagających jedynie odczytywania i przekładu informacji wyrażonych w definicjach, twierdzeniach i wzorach, zamiast założonego teoretycznie organizowania aktywności matematycznej uczniów[20].

Przeciwieństwem sztywności (uporczywego stosowania wypróbowanych sposobów działania, nawet wówczas gdy są one już mniej racjonalne) jest plastyczność – czyli umiejętność dostosowywania działań do zmieniających się warunków otoczenia. Plastyczność może mieć charakter adaptacyjny bądź spontaniczny. Jest kojarzona z twórczym rozwiązywaniem problemów, w tym matematycznych. Wszystkie opisane zachowania są uzależnione od indywidualnych doświadczeń dziecka, wcześniej podejmowanych aktywności i posiadanych umiejętności oraz postaw nauczycieli i rodziców. Jako że geometria jest dziedziną matematyki, przyjmuję, iż opisane pojęcia, zjawiska i syndromy odnoszą się również do działań w jej obszarze.

4.3. UZDOLNIENIA MATEMATYCZNE

Problematyka uzdolnień matematycznych pojawiła się w literaturze psychologicznej na początku XX wieku, jednak pojęcie to jest nadal trudne do zdefiniowania. W potocznym rozumieniu uzdolnienia matematyczne utożsamiane są zazwyczaj z inteligencją ogólną lub inteligencją logiczno-matematyczną. Sama matematyka, z jednej strony, jest przedmiotem postrzeganym jako trudny, po-

20 *Ibid*., s. 68–69.

zbawiony sensu i powodujący silne obawy oraz awersję, a z drugiej – dyscypliną przeznaczoną dla wybrańców przejawiających szczególne uzdolnienia[21].

Badania nad inteligencją rozpoczęto na początku XX wieku. W wyniku pomiarów i dociekań Ch. E. Spearmana opublikowano hierarchiczną teorię zdolności, która głosiła, że „inteligencja jest czynnikiem nadrzędnym w stosunku do wszystkich uzdolnień ludzkich"[22], a osiągnięcia, szczególnie w dziedzinach artystycznej, technicznej i naukowej, uwarunkowane są wysokim potencjałem intelektualnym jednostki. Współcześnie – argumentem przemawiającym za wyodrębnieniem z ogólnych zdolności uzdolnień matematycznych może być opinia W. Szewczuka, który podaje, że żadna podstawowa zdolność (sprawność) nie istnieje sama dla siebie, a funkcjonuje w kontekście pozostałych, każda jest też związana z konkretną działalnością i stanowi to przesłankę dla uzasadnienia istoty uzdolnień, czyli zdolności specjalnych, które są „zespołem, konstelacją wewnętrznych warunków danej jednostki, decydujących o poziomie i jakości osiągnięć w wyspecjalizowanej działalności"[23].

W historii badań nad uzdolnieniami matematycznymi można wyróżnić dwa istotne ujęcia:

– *strukturalne*, w którym badacze skoncentrowani są na wyróżnianiu elementów składowych uzdolnień i tworzeniu ich struktury. W takim rozumieniu uzdolnienia matematyczne znajdują sie w grupie uzdolnień specjalnych, które wchodzą w skład struktury zdolności człowieka. Przykładem jest obecność zdolności matematycznych w strukturze wielu hierarchicznych modeli i teorii inteligencji, w wymienionej teorii inteligencji Ch. E. Spearmana, w koncepcji inteligencji P. E. Verona, L. L. Thurstona czy J. P. Guilforda. W ujęciu strukturalnym rozwijanie uzdolnień wymaga poznania specyficznych komponentów danego uzdolnienia po to, by mieć świadomość, co jest dla niego specyficzne i jak te komponenty stymulować do rozwoju. Przykładem jest definicja uzdolnień matematycznych wybitnego psychologa rosyjskiego W. A. Krutieckiego:

> [...] uzdolnienia matematyczne charakteryzuje uogólnione, zredukowane i plastyczne myślenie w zakresie stosunków matematycznych, symboli i oznaczeń matematycznych oraz matematyczny typ myślenia[24].

---

21 A. Pardała, *Nowe tendencje w kształceniu matematycznym szansą podniesienia jego poziomu*,[w:] M. Czajkowska, G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wyd. AŚ, Kielce 2006, s. 16.

22 S. Popek (red.), *Aktywność twórcza dzieci i młodzieży,* WSiP, Warszawa 1988, s. 20.

23 Cz. Nowaczyk, *Uczeń zdolny. Rozpoznawanie zdolności i uzdolnień dzieci i młodzieży,* ODN, Jelenia Góra 1988, s. 9.

24 B. Łubianka, *Wokół uzdolnień matematycznych – przegląd badań*, Studia z Psychologii KUL, t. 14, P. Francuz, W. Obrębski (red.), KUL, Lublin 2007, s. 187.

– *funkcjonalne*, w świetle którego określa się uzdolnienia matematyczne jako dyspozycje stanowiące warunek pomyślnego uczenia się i uzyskiwania osiągnięć i uważa się, że są one determinantami opanowania specyficznego systemu symboli matematycznych, szczególnie w procesie rozwiązywania problemów.

Podejścia te są łączone, co pozwala określać „uzdolnienia matematyczne jako swoiste właściwości percepcji, myślenia i pamięci, które przejawiają się na materiale liczb i symboli"[25] lub opisywać ich właściwości. W. Krupa, łącząc ujęcie strukturalne i funkcjonalne, uznaje:

> [...] **uzdolnienia matematyczne** charakteryzuje uogólnione, zredukowane i plastyczne myślenie w zakresie stosunków matematycznych, symboli i znaczeń matematycznych oraz matematyczny typ myślenia, dzięki czemu możliwe jest opanowanie (uczenie się) matematyki na określonym poziomie programu szkolnego oraz szybkie i skuteczne opanowanie konkretnych wiadomości, umiejętności, nawyków[26].

Istotnym osiągnięciem współczesnych badaczy jest określenie czterech komponentów tworzących uzdolnienia matematyczne. Należą do nich: **czynnik przestrzenny, logiczny, liczbowy** i **symboliczny.**

W komponencie przestrzennym zawierają się: rozumienie figur przestrzennych, pamięć obrazów przestrzennych, abstrakcje przestrzenne oraz samodzielne odkrywanie związków i stosunków w obiektach przestrzennych. Zdolności te są ściśle związane z rozumieniem pojęć geometrycznych.

Komponent logiczny mieści w sobie: przyswajanie pojęć matematycznych i abstrakcji pojęciowych, zrozumienie, zapamiętanie i samodzielne wydzielanie prawidłowości i dowodów praw logiki formalnej.

Składnik liczbowy odnosi się do przyswajania stosunków liczbowych, pamięci liczb i liczbowych rozwiązań, zaś w skład komponentu symbolicznego wchodzą: zrozumienie i zapamiętanie symboli, a także dokonywanie operacji z ich udziałem[27].

S. Popek jest zgodny co do wyróżnionych komponentów uzdolnień matematycznych, dodając, że istotne w rozpoznawaniu uzdolnień jest dostrzeganie przejawów aktywności w wyżej wymienionych zakresach. Mogą to być następujące rodzaje działań: dostrzeganie relacji i stosunków liczbowych, wykazywanie się umiejętnością dokonywania przekształceń w zbiorach, dostrzeganie i rozumienie obrazów i relacji przestrzennych, transformacje obrazów przestrzennych, abstrakcje przestrzenne, kombinatoryka, umiejętność formułowania strategii kom-

---

25 *Ibidem.*
26 *Ibidem*, podkr. B. B.-K.
27 *Ibid.*, s. 192.

binatorycznych oraz dokonywanie działań i operacji arytmetycznych, operacje na symbolach liczbowych, pamięć liczb[28].

W ogólnym schemacie struktury zdolności matematycznych W. A. Krutiecki wyróżnia następujące komponenty:

- matematycznie ukierunkowany umysł – zamiłowanie do interpretowania otaczającego świata w kategoriach logicznych;
- zdolność logicznego rozumowania związanego z potrzebą dowodzenia i uzasadniania, zdolność do rozwiązań prostych, jasnych, ekonomicznych i racjonalnych;
- zdolność do sformalizowanego postrzegania matematycznego materiału, pojmowania struktury formalnej zadania;
- zdolność do uogólniania matematycznego materiału;
- zdolność do operowania liczbą i znakową symboliką; matematycznymi symbolami;
- zdolność do skracania procesu myślowego, myślenia strukturami zredukowanymi, szybkiej i dowolnej zmiany kierunku myślenia;
- zdolność do odwracalności procesu myślenia;
- zdolność przechodzenia od jednej myślowej operacji do drugiej, jakościowo innej, przestawiania procesu rozumowania z jednego na przeciwny tok rozumowania matematycznego, plastyczność intelektualnych procesów ujawniająca się w matematycznej działalności (giętkość myślenia matematycznego);
- zdolność do zapamiętywania typów zadań, przechowywania matematycznych informacji i uogólnionych sposobów ich rozwiązywania (pamięć matematyczna);
- zdolność do wyobrażeń przestrzennych[29].

Wiele tych znamion przejawiają uzdolnieni matematycznie uczniowie liceum w wieku 16–17 lat, co wynika z badań prowadzonych przez M. Klaklę[30]. Zdaniem tego badacza uzdolnieni matematycznie uczniowie cechują się:

1. Umiejętnością twórczego odbierania, przetwarzania i wykorzystywania informacji matematycznej.
2. Umiejętnością poprawnego wykorzystywania definicji w rozumowaniach w przypadku, gdy jest ona w konflikcie z jakimś innym czynnikiem.
3. Umiejętnością kontrolowania poprawności przeprowadzonego rozumowania, zarówno od strony formalnej, jak i treściowej.

---

28 S. Popek, *Psychologiczne i społeczne uwarunkowania zdolności i uzdolnień specjalnych* [w:] A. Biela, Cz. Walesa (red.), *Problemy współczesnej psychologii*, t. 1, Wyd. PTP, Lublin 1992, s. 97–105.

29 Cz. Nowaczyk, *Uczeń zdolny...*, s. 10.

30 M. Klakla, *Z badań nad rozpoznawaniem uzdolnień matematycznych* [w:] J. Żabowski (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. III, Płock 2002, s. 260.

4. Aktywną reakcją na pojawienie się sprzeczności w wyniku rozumowania.
5. Umiejętnością twórczego przeniesienia metody rozwiązania danego problemu na zadanie ogólniejsze.
6. Umiejętnością przeprowadzania analizy treści zadań o złożonej strukturze logicznej.

Wymienione cechy dotyczą aktywności matematycznej i jej wyraźnego czynnika, jakim jest dyscyplina myślenia, ujawniana podczas rozwiązywania zadań matematycznych. Choć inne wskaźniki aktywności są trudniejsze do zaobserwowania i wymagają pogłębionej diagnozy, można próbować określać cechy *matematycznego typu umysłowości* (za: W. A. Krutiecki), którego przejawy będą najbardziej widoczne podczas rozwiązywania przez jednostkę zadań.

Sięgając głębiej w zagadnienie, badacze problemu opisuję dwa typy uzdolnień matematycznych:

- produktywny (zw. heurystycznym), który pozwala na formułowanie oryginalnych praw i znajdowanie rozwiązań. W tym kontekście uzdolnienia matematyczne mają twórczy charakter, a w myśleniu matematycznym uzdolnionych pojawiają się nowe, niestereotypowe rozwiązania matematycznych problemów;
- nieproduktywny (tzw. algorytmiczny) – związany z opanowaniem znanych schematów rozwiązań, postępowaniem według z góry ustalonych zasad i reguł rozwiązań[31].

Klasyfikację, w której można odnaleźć aspekt geometryczny, dodatkowo podaje Cz. Nosal, który wyróżnia następujące style matematyczne:

– *algebraiczny*, związany z myśleniem symultanicznym, skoncentrowanym na liczbach;
– *geometryczny*, związanym z myśleniem obrazowym[32].

Szukając czynnika geometrycznego w strukturze uzdolnień matematycznych, należy zwrócić uwagę na wyróżnione przez Canisia kryteria uzdolnienia matematycznego. Należą do nich: umiejętność widzenia i odkrywania stosunków oraz sposobów ich łączenia, a także wyciągania wniosków, umiejętność wyprowadzania zależności, możliwość swobodnego posługiwania się poszczególnymi symbolami matematycznymi, łatwość dokonywania analizy zadania i planowania kolejnych etapów jego rozwiązania[33].

Jak wynika z przeglądu badań, większość z nich dotyczy młodzieży szkolnej[34], znacznie mniej jest badań dotyczących dzieci w wieku przedszkolnym. Brak wskaźników określających manifestowanie się uzdolnień matematycznych i zwe-

---

31 B. Łubianka, *Wokół uzdolnień matematycznych – przegląd badań*, s. 187.
32 *Ibidem.*
33 *Ibid.*, s. 191–192.
34 *Ibid.*, s. 186.

ryfikowanych sposobów ich rozwijania pociąga za sobą trudności interpretacyjne i rodzenie się przekonań, że łatwość uczenia się matematyki jest przejawem ogólnych zdolności intelektualnych jednostki.

Pierwszym psychologiem, który zwrócił uwagę na czas pojawiania się uzdolnień matematycznych w rozwoju dziecka, jest W. A. Krutiecki. Jego zdaniem zadatki wrodzonych uzdolnień matematycznych można dostrzec już u dzieci, trudno jednak określić w sposób jednoznaczny, jaki jest to dokładnie czas.

W wieku przedszkolnym rozwój dziecka postępuje dynamicznie, ale może być też skokowy i nieharmonijny. Dziecko zdolne, mające 5–7 lat, najczęściej charakteryzowane jest w literaturze psychopedagogicznej jako mające szczególne predyspozycje do ponadprzeciętnych osiągnięć w różnych dziedzinach, przejawiające wysoki potencjał intelektualny, z takimi wyróżniającymi się cechami, jak:

- łatwe zapamiętywanie i uczenie się rzeczy nowych, natychmiastowe zrozumienie problemów. Około 1/3 dzieci zdolnych przed rozpoczęciem szkoły umie czytać i liczyć do 100;
- zadawanie pytań, zainteresowanie światem, bystra obserwacja i spostrzegawczość;
- wykonywanie zadań umysłowych z przyjemnością, umiejętność skupienia uwagi przez dłuższy czas na tym, co dziecko interesuje. W nielicznych przypadkach dzieci ujawniają już konkretne zainteresowania i uzdolnienia kierunkowe;
- wymyślanie nowych zabaw, opowiadań, sytuacji realnych lub abstrakcyjnych. Ciekawe, oryginalne pomysły, bogata wyobraźnia, potrzeba wyrażania myśli lub emocji za pomocą różnych form plastycznych w formie słów, ruchu, muzyki;
- niezależna postawa wobec innych, zdolność obrony swoich racji, samodzielność w pracy.

Zdaniem M. Partyki posiadanie trzech spośród powyższych cech oznacza, że dziecko ma szanse, by być w przyszłości jednostką wybitną[35].

Wielu badaczy uważa, że dziecięce uzdolnienia matematyczne współwystępują wraz z innymi uzdolnieniami (np. przyrodniczymi) i podają, że jednostki takie charakteryzuje spostrzegawczość, szybkość uczenia się, ciekawość i stawianie wielu problemów, szeroki zakres pamięci, długie przechowywanie materiału w pamięci, wysoki poziom planowania, umiejętność rozwiązywania problemów, dobre radzenie sobie w sytuacjach trudnych, myślenie na poziomie abstrakcyjnym,

---

[35] M. Partyka, *Zdolni, utalentowani, twórczy*, CMPPP, MEN, Warszawa 1999, s. 51.

upodobanie do samodzielnej pracy, chętne eksperymentowanie i poszukiwanie sposobów na osiąganie celów, oryginalność pomysłów[36].

Z najnowszych badań E. Gruszczyk-Kolczyńskiej[37] wynika, że więcej niż połowa dzieci w wieku przedszkolnym (ok. 58%) wykazuje się zadziwiającą łatwością nabywania wiadomości i umiejętności matematycznych oraz matematycznym ukierunkowaniem umysłu, które to cechy, zdaniem W. A. Krutieckiego, są najważniejszymi wskaźnikami uzdolnień matematycznych. Zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej cechą uzdolnionych dzieci jest „patrzenie na świat matematycznymi oczami, skłonność, by myśl biegła w kierunku liczby i miary", przejawianie zainteresowania liczeniem w dużym zakresie, dokonywaniem operacji przy użyciu liczb oraz wykazywanie się skłonnością do mierzenia obiektów znajdujących się w rzeczywistości[38]. Ponadto zdaniem E. Gruszczyk-Kolczyńskiej do prawidłowości należy to, że:

- dzieci uzdolnione matematycznie znacznie wcześniej niż inne dzieci zaczynają rozumować operacyjnie, przez co też szybciej przechodzą od konkretów do abstrakcji. Ten rodzaj kompetencji jest jednak trudny do zaobserwowania, gdyż myślenie operacyjne ma charakter operacji uwewnętrznionych;
- obserwuje się u nich *poczucie sensu*, co pozwala im prowadzić szybciej do finału czynności matematyczne i być bardziej krytycznymi w stosunku do własnej działalności i działalności innych, przy czym to poczucie sensu dotyczy głównie działalności matematycznej;
- dzieci uzdolnione matematycznie są niezniszczalne emocjonalnie pod względem wysiłku intelektualnego; skoncentrowane na zadaniu i skłonne do dłuższego wysiłku;
- są krytyczne i dostrzegają absurdy szybciej niż inne dzieci;
- są twórcze matematycznie, to znaczy same wyszukują sobie sytuacje, w których można liczyć i mierzyć[39].

---

36 E. Zyzik, W. Grelowska, *Po czym poznać dziecko zdolne* [w:] I. Stańczak (red.), *Wspieranie rozwoju zdolności uczniów w edukacji wczesnoszkolnej. Teoria i praktyka*, Wyd. Ped. ZNP, Kielce 2008, s. 28–29.

37 E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci uzdolnione matematycznie: mity i realia* [w:] *Problemy edukacji wczesnoszkolnej. Indywidualizacja, uzdolnienia – refleksje nauczyciela*, Wyd. UMCS, Lublin 2011, s. 64.

38 E. Gruszczyk-Kolczyńska, „Dzieci uzdolnione matematycznie: mity i realia". Referat wygłoszony na konferencji: „Indywidualizacja w edukacji wczesnoszkolnej", 08.11.2010 w Lublinie.

39 E. Gruszczyk-Kolczyńska, H. Moroz, J. Łysek, M. Wojnowska, *Metoda diagnozy działalności matematycznej dzieci z klas początkowych*, Wyd. Radia i Telewizji, Warszawa 1988, s. 55–56.

Współcześnie uzdolnienia matematyczne charakteryzuje się także w świetle teorii inteligencji wielorakich H. Gardnera[40]. W świetle tej koncepcji uzdolnienia matematyczne należy odnosić do inteligencji logiczno-matematycznej, rozumianej jako umiejętność rozwiązywania problemów, operowania długimi łańcuchami rozumowań, czyli myśleniem naukowym[41]. Zdaniem M. Suświłło ludzie obdarzeni tą inteligencją mają zdolność do zauważania związków między obiektami i do rozwiązywania problemów zarówno przez liczenie, jak i metody techniczne.

> Dzieci z wysoką inteligencją matematyczną lubią dociekać i zadawać pytania. Potrafią posługiwać się liczbami i czerpią przyjemność z rozwiązywania problemów. Mają zdolność rozumienia symboli, kategorii, przyczyn i skutków. Lubią gry strategiczne, puzzle logiczne i eksperymenty. Chętnie korzystają z komputera[42].

Szukając komponentów poznawczych uzdolnień geometrycznych cechujących dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym, należy również odwołać się do określonej przez H. Gardnera inteligencji wizualno-przestrzennej, czyli zdolności do myślenia obrazami. Zdaniem M. Suświłło osoby obdarzone tą inteligencją, przyjmując informacje, przekładają ja na obrazy, potrafią swobodnie i szybko korzystać z wyobrażeń, mają zdolność rozumienia geometrii i rozpoznawania związków między obiektami w przestrzeni. Dzieci z inteligencją wizualną poza odnoszeniem sukcesów w zakresie geometrii w szkole są często utalentowane plastycznie, interesuje je sztuka, architektura, rzeźba, układanki, fotografia, lubią układanki, labirynty i mozaiki, spędzają czas na rysowaniu i budowaniu z klocków. Określa się je jako osoby, które *śnią na jawie*[43].

* * *

Z analizy wynika, że nadal zdolności matematyczne definiowane są wąsko – w odniesieniu do sprawności wykonywania operacji arytmetycznych. Badacze zwracają zbyt mało uwagi na czynnik przestrzenny jako komponent tych specyficznych uzdolnień. W strukturalnych modelach zdolności nie zostały do tej pory wyodrębnione zdolności geometryczne i ich cechy. Świadczy to o swego rodzaju niszy w tym obszarze badań.

---

40 H. Gardner, *Inteligencje wielorakie. Nowe horyzonty w teorii i praktyce,* Wyd. Laurum, Warszawa 2009.

41 M. Suświłło, *Inteligencje wielorakie w nowoczesnym kształceniu,* Wyd. UWM, Olsztyn 2004, s. 17.

42 *Ibid.,* s. 33.

43 *Ibidem.*

4.4. TRUDNOŚCI W UCZENIU SIĘ MATEMATYKI I GEOMETRII

Pojęcie trudności szkolnych jest używane w znaczeniu wąskim i szerokim. Gdy u dziecka wystąpią matematyczne trudności, ujawniające się niezależnie od prawidłowego rozwoju intelektualnego i sprzyjających warunków środowiska, należy wziąć pod uwagą kontekst, w jakim występują. Bywa tak, że przejawy trudności ujawniające się pod postacią problemów w uczeniu się matematyki są wtórne wobec zaburzeń emocjonalnych, trosk i przeżyć dziecka. Mają wówczas charakter przejściowy, zależny od przywrócenia równowagi emocjonalnej. Gdy trudności utrzymują się blisko rok, najpewniej związane są z opóźnieniami rozwoju procesów psychomotorycznych i myślenia – niezbędnych do uczenia się matematyki, lub istnieniem dysharmonii rozwojowych, np. obniżonego poziomu rozwoju jednej sfery, przykładowo sprawności motorycznej. Trudności szkolne mogą wynikać również z niedojrzałości układu nerwowego lub nieosiągnięcia standardów w zakresie rozwoju społeczno-emocjonalnego. Najczęściej określa się je jako „specyficzne" i w odniesieniu do uczenia się matematyki dotyczą one liczenia i rozumowania matematycznego.

Gdy zaburzenia są trwałe i mają charakter genetyczny, mogą być związane z dyskalkulią rozwojową. W amerykańskiej klasyfikacji chorób DSM-IV z 1994 roku trudności w uczeniu się matematyki są umieszczone w kategorii trudności w uczeniu się. Dzieci przejawiające te trudności nie mogą osiągnąć poziomu biegłości w procesach matematycznych pomimo: prawidłowej inteligencji, sprzyjających warunków edukacyjnych, braku zaburzeń emocjonalnych oraz przejawiania odpowiedniego poziomu motywacji do nauki.

Trudności w uczeniu się matematyki wg DSM-IV ma ok. 1% populacji szkolnej i ok. 6,5% dzieci[44]. Rozpatrując ich uwarunkowania, badacze wskazują na dwa źródła. Pierwsze związane jest z zaburzeniami lewej półkuli i dysfunkcjami językowymi. W tym przypadku trudności arytmetyczne stanowią rezultat deficytów językowych, u dzieci zaburzone są: percepcja dotykowa, wzrokowa, zdolności motoryczne, formułowanie wniosków, rozwiązywanie problemów, myślenie matematyczne i logiczne

Drugie źródło związane jest z zaburzeniami prawej półkuli i uwarunkowane jest deficytami niejęzykowymi, typu wzrokowo-przestrzennego. W obydwu

[44] A. R. Borkowska, Ł. Domańska, *Neuropsychologia kliniczna dziecka,* PWN, Warszawa, 2006, s. 162.

przypadkach proces budowania pojęć i nabywania kompetencji geometrycznych z uwagi na przedstawione deficyty jest utrudniony[45].

Jako że zdolności i trudności matematyczne rozpatruje się w odniesieniu do umiejętności tak arytmetycznych, jak i przestrzennych, warto poświęcić im nieco uwagi. Przyjrzyjmy się zatem najpierw kłopotom związanym z aspektem liczbowym, a następnie z aspektem przestrzennym.

Z trudnościami w liczeniu związane są najczęściej mikrouszkodzenia określane mianem dyskalkulii. *Dyskalkulia rozwojowa* jest strukturalnym zaburzeniem zdolności matematycznych, mającym swe podłoże w zaburzeniach genetycznych i wrodzonych tych części mózgu, które są bezpośrednim podłożem anatomiczno-fizjologicznym dojrzewania zdolności matematycznych, odpowiednio do wieku, bez jednoczesnego zaburzenia ogólnych funkcji umysłowych.

Według słowackiego neuropsychologa L. Koščа rodzaje dyskalkulii to:

- dyskalkulia werbalna (słowna) – przejawia się w postaci zaburzeń nazywania pojęć matematycznych, symboli, działań i dokonań matematycznych, trudności z określaniem liczby obiektów (dziecko potrafi napisać liczbę, ale nie utożsamia jej z określoną liczbą obiektów), z nazywaniem cyfr i numerów (z użyciem liczebników głównych, porządkowych i zbiorowych), problemy ze zrozumieniem napisanych liczb mimo ich poprawnego odczytania;
- dyskalkulia leksykalna (związana z czytaniem) – zaburzenie odczytywania symboli matematycznych, cyfr, liczb, znaków, operacyjnych, kojarzenia ich z nazwami (+, – x.:, =, <,>) i ich nazwami. W lżejszej formie zaburzenia dziecko nie potrafi odczytać pojedynczych cyfr, nie umie czytać liczb wielocyfrowych, z zerami w środku, liczb dziesiętnych, ułamków, kwadratów, pierwiastków;
- dyskalkulia graficzna – przejawia się w trudnościach z zapisywaniem liczb i symboli operacyjnych, np. przy pisemnym dodawaniu i odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu. W poważniejszych przypadkach dziecko nie potrafi napisać dyktowanych liczb ani ich skopiować (np. pięćset czterdzieści dwa jako 542 czy wyrazu sześć zamiast 6);
- dyskalkulia praktognostyczna (wykonawcza) – zaburzenie manipulowania realnymi lub obrazkowymi obiektami w celach matematycznych – przy obliczaniu liczebności zbioru, porównywaniu ilości lub wielkości, w trudnościach z uszeregowaniem obiektów wg kolejności rosnącej bądź malejącej, w problemach ze wskazywaniem, który z porównywanych obiektów jest mniejszy, większy, które są tej samej wielkości. Wydaje się, że ten rodzaj trudności może mieć duże znaczenia dla procesu nabywania kompetencji geometrycznych;

45 *Ibid.*, s. 170–171.

- dyskalkulia ideognostyczna (pojęciowo-poznawcza) – dziecko nie jest zdolne do dokonywania w pamięci nawet najprostszych obliczeń, jest to zaburzenie rozumienia idei matematycznych niezbędnych do wykonywania obliczeń pamięciowych, dziecko wykazuje trudności w dostrzeganiu zależności liczbowych (że np. 6 to połowa 12, 6 jest większe o 1 od 5, 6 to 2x3);
- dyskalkulia operacyjna – jest zaburzeniem dotyczącym dokonywania działań matematycznych, mimo możliwości wzrokowo-przestrzennych, oraz umiejętności czytania i pisania liczb[46].

Inne zaburzenia zdolności matematycznych to:

– kalkulastenia – opóźnienie w opanowaniu wiadomości i umiejętności z dziedziny matematyki przy przeciętnym poziomie zdolności matematycznych i poziomie inteligencji;
– akalkulia – jako całkowity brak zdolności matematycznych;
– oligokalkulia – obniżony poziom cząstkowych zdolności poznawczych, związany najczęściej z globalnym opóźnieniem rozwoju umysłowego;
– parakalkulia – zaburzenia zdolności matematycznych współwystępujące z chorobą psychiczną;
– pseudodyskalkulia – polegająca na tym, że dziecko nie jest w stanie wykazać swoich potencjalnych zdolności wskutek zaburzenia emocjonalnego, choroby fizycznej, zmęczenia czy braków wiadomościach[47].

W znacznie mniejszym zakresie opisane są przez badaczy trudności w uczeniu się geometrii. Zagadnienia te nie są jeszcze dobrze poznane, sklasyfikowane i wyjaśnione. Można sądzić, że mają tak samo podłoże neuropsychologiczne i wiązać je z deficytami w zakresie rozwoju percepcji wzrokowej i myślenia przestrzennego. Są one także prawdopodobnie, jak wiele innych, uwarunkowane środowiskowo. Analiza literatury wskazuję, że we współczesnej pedagogice pojawia się pojęcie *syndrom antygeometryczny*[48], rozumiany jako awersja uczniów do geometrii spowodowana nierozumieniem zagadnień geometrycznych, brakiem treningu w tym zakresie, potęgowanym przez wadliwe podejście edukacyjne, i niedocenianie wartości kursu geometrii na wczesnym etapie edukacji.

Wadliwe podejście edukacyjne może wynikać z nieznajomości etapów kształtowania się w umyśle dziecka pojęcia geometrycznego lub braku refleksyjności czy czujności pedagogicznej. Jeśli dorosły nie zna teorii psychologicznych J. Piageta, L. Wygotskiego, P. van Hielego, J. Brunera czy M. Hejnýego, interpretujących rozwój myślenia przestrzennego dziecka, grozi to organizowaniem sytuacji edukacyjnych i stawianiem zadań niezgodnych z gotowością dziecka do uczenia

46 L. Košč, *Psychologia i patopsychologia zdolności matematycznych*, WSiP, Warszawa 1982.
47 A. R. Borkowska, Ł. Domańska, *Neuropsychologia kliniczna dziecka*, s. 168.
48 J. F. Szarygin, L. N. Jerganżyjewa, *Geometria poglądowa,* s. 5.

się, proponowaniem zadań zbyt trudnych lub zbyt łatwych, niemieszczących się w strefie najbliższego rozwoju. Z kolei brak działań o charakterze geometrycznym, np. manipulowania kształtami, wyróżniania ich w przedmiotach otaczającego świata, posługiwania się schematem czy ustalania liczby ścian lub boków, utrudnia osiągnięcie przez dziecko wyższego poziom rozwojowego, np. poziomu opisowego pojęcia geometrycznego, co tym samym wydłuża lub uniemożliwia budowanie się w umyśle pojęcia geometrycznego, itd. Dorosły powinien więc przestrzegać zasady budowania pojęć geometrycznych przez stawianie zadań w zakresie aktywności na trzech poziomach reprezentacji J. Brunera: enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej. Musi też wyważyć zakres i proporcje w działaniach o tym charakterze, przestrzegając kolejności poziomów van Hielego: najpierw wizualny, potem opisowy i logiczny.

Nauczyciel powinien być wrażliwy na przykład na to, czy przypadkiem nie nadużywa konkretów. Manipulacja na materiale konkretnym, zgodna z podejściem J. Piageta, jest ważna i stanowi punkt wyjścia, ale także zaleca się, aby modele konkretne (np. realne obiekty, rysunki) konkretyzowały obiekty formalne. Przykładowo są figury płaskie, których brzegiem jest np. kwadrat.

Kwestią generującą trudności w rozumieniu geometrii może być także nadmierne wykorzystanie rysunków. W planimetrii właściwości figur płaskich uczeń widzi bezpośrednio na rysunku, w stereometrii należy sięgać do środków poglądowych i modeli trójwymiarowych, gdyż własności brył nie są zachowane w rysunkach. Ograniczanie aktywności geometrycznej do rozwiązywania zadań w zeszycie ćwiczeń i rysowania może powodować znaczne wydłużenie procesu nabywania pojęć. Podobnie odwracanie poziomów, na przykład przez uczenie stereometrii oparte na analizie rysunków, prowadzi do trudności i błędów w procesie edukacji geometrycznej.

Trudności te wynikają między innymi z tego, że sposób myślenia dorosłego jest inny niż sposób myślenia dziecka. Dziecko utożsamia reprezentacje codziennego świata z obiektami matematycznymi, a dorosły z obiektami abstrakcyjnymi. Geometria jako nauka osadzona w świecie konkretów jest dla dziecka z tym światem związana bardzo realnie, inaczej niż dla dorosłego. Geometria, podobnie jak matematyka, jest przeżyciem psychicznym i ma charakter indywidualny, osobisty, niedostępny z zewnątrz, ma inną drogę powstawania i swoje istnienie. Jak podaje G. Treliński, każde pojęcie matematyczne, np. koło, jest specyficzną całością, o której myślimy jako o matematycznym obiekcie (co to jest?), procedurze (jak zrobić? jak go wyznaczyć) i symbolu (jak zapisać? jak oznaczyć?). Dorosły ma te składowe zintegrowane, ale u dziecka funkcjonują one oddzielnie, stąd mogą się pojawić nieporozumienia we wzajemnym zrozumieniu komunikatów i rozbieżności interpretacyjnej, gdy słowa mogą mieć różny sens. Z tego powodu, jak podaje badacz, „nauczyciel musi mieć świadomość specyficznego traktowania

przez dziecko (odmiennego niż dorosły) przedmiotu matematyki; musi dobierać takie sytuacje dydaktyczne, które nie pogłębiają dwuznaczności metodologicznej, nie będą prowadzić do niejasności i sztuczności pojęciowej"[49].

Innymi przyczynami nieporozumień, na które wskazuje ten badacz, są kontekst sytuacyjny i językowy, różnice w rozumieniu oraz zoperowaniu językiem matematyki, a także odmienne traktowanie celów poznania matematycznego[50]. G. Treliński zwraca ponadto uwagę na stronę psychologiczną i emocjonalną sytuacji trudnej, jaką stwarza każde zadanie matematyczne. Jako źródła wielu trudności w uczeniu się wymienia: lekceważenie emocji współtowarzyszących procesom intelektualnym, dezintegralne ujmowanie doświadczeń ucznia, bagatelizowanie społecznych uwarunkowań rozwiązania zadań[51]. Gdy nauczyciel nie dostrzega znaczeń tych kwestii, nauczanie geometrii może skutkować awersją, budowaniem niedoskonałych pojęć, zahamowaniem procesu uczenia się i w konsekwencji bezradnością geometryczną.

Ułomne podejście edukacyjne wyraża się także w preferowaniu stylu behawiorystyczno-funkcjonalistycznego w toku poznawania przez dzieci świata geometrii. Podawanie gotowej wiedzy, np. właściwości figury geometrycznej, bez jej konstruktywnego badania nie sprzyja interioryzowaniu, uwewnętrznianiu schematów, bo proces powstawania struktur, schematów poznawczych jest wydłużony. Stąd konieczna jest wiedza merytoryczna i świadomość znaczenia „badania sytuacji zadaniowych osadzonych w kontekstach realnych, ich matematyzowanie, stawianie pytań dotyczących tych kontekstów oraz poszukiwanie na nie odpowiedzi"[52]. Konieczne wydaje się także postulowanie wyzwalania i rozwijania wielorakiej twórczej i odtwórczej aktywności matematycznej, aktywności na materiale konkretnym, graficznym i symbolicznym, co podkreślał J. Bruner. Jeśli działanie nie jest codzienną praktyką, jest realizowane okazjonalnie lub jest tylko ideą, rodzą się trudności w rozumieniu i budowaniu w umyśle dziecka świata pojęć geometrycznych.

Z innych przyczyn trudności w nauczaniu–uczeniu się geometrii J. Filip i T. Rams podają oddzielanie planimetrii od stereometrii:

> Nauczanie początkowe geometrii powinno wiązać się z bryłami, które są bliskie dzieciom i lepiej wyobrażalne niż figury płaskie. Należy pamiętać, że dziecko ma wrodzoną zdolność widzenia trójwymiarowego. Powinno być więc zapoznawane od samego początku z różnymi figurami w przestrzeni trójwymiarowej, a zatem

---

[49] *Ibidem.*
[50] *Ibidem.*
[51] *Ibidem.*
[52] *Ibidem.*

> tworami: jedno-, dwu- i trójwymiarowymi. Uczeń lepiej rozumie geometrię, gdy widzi różne konfiguracje[53].

W tym kontekście warto mieć na względzie, by treści geometryczne ujmować holistycznie.

Pewne problemy w zakresie geometrii mogą być również związane z brakiem ćwiczeń pozwalających doskonalić stałość spostrzeżeń. Przykładowo stereotypowe rysowanie figur geometrycznych, np. figur płaskich bez wypełniania ich w środku, może utrwalać mylne wrażenia i cechy figur oraz mylenie pojęć (np. obwód, który jest wartością liczbową i określa długość wszystkich boków, może być mylony z brzegiem, czy sam rysunek boków figury może być nazywany figurą). J. Filip i T. Rams podają, że dzieci „rysując figury geometryczne, traktują w sposób uprzywilejowany pewne ich położenia (np. boki równoległe trapezu rysowane są na tablicy poziomo, boki prostokąta poziomo lub pionowo). Prowadzi to później do trudności w rozpoznawaniu figur. Ta sama figura w innym położeniu jest według ucznia – trapezem, a w innym – nie[54].

Aby temu zapobiec, wskazane są ćwiczenia pozwalające manipulować figurami i poznawać je w różnych konfiguracjach i po przekształceniach.

Uwrażliwienie na odmienność myślenia dziecka i otwartość umysłu dorosłego na interpretowanie tych różnic w świetle sprawdzonych teorii psychopedagogicznych pozwala zminimalizować środowiskowe uwarunkowania powstawania trudności o charakterze geometrycznym. Na ten efekt nauczyciel zdecydowanie ma wpływ i to od jego kompetencji metodycznych i psychologicznych zależy w dużej mierze sukces, którym jest brak trudności w rozumieniu przez dziecko świata geometrii.

---

53 J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie...*, s. 151.

54 *Ibid.*, s. 153.

5. DROGI I WARUNKI POZNANIA GEOMETRYCZNEGO

Dzieci mają do czynienia ze światem geometrii od najmłodszych lat i nie pozostają w tych działaniach odosobnione. Pomaga im dorosły lub bardziej kompetentny rówieśnik. To on pierwszy kieruje uwagę dziecka na kształty i wymiary, posługuje się określeniami dotyczącymi położenia przedmiotów w przestrzeni, używa odpowiednich słów na określenie odległości, długości, szerokości, wysokości. Takie działania, początkowo spontaniczne i naturalne, choć wstępne, są niezmiernie istotne i stanowią punkt wyjścia działań bardziej świadomych. Niniejszy rozdział jest poświęcony zasadom i warunkom budowania przez dzieci wiedzy geometrycznej w toku organizowanych i kierowanych przez nauczyciela działań w przedszkolu i szkole. Zawiera rozważania na temat zasad budowania wiedzy geometrycznej, zewnętrznych i wewnętrznych kontekstów aktywności geometrycznej, kwestie organizacji przestrzeni, czasu i stopnia ingerencji w działania dzieci. Treści te mogą pomóc nauczycielom, rodzicom i studentom w bardziej refleksyjnym i twórczym działaniu.

5.1. ZASADY BUDOWANIA WIEDZY GEOMETRYCZNEJ

Interpretując prawdę psychologiczną, że na każdym etapie rozwoju dziecko może uczyć się skutecznie każdego przedmiotu, J. Bruner odwołuje się do poziomu umysłowego wychowanka, procesu uczenia się oraz układu treści kształcenia. Podkreśla, że dziecko zawsze patrzy na świat w sposób indywidualny i wyjaśnia go sobie w charakterystyczny sposób, dlatego należy przedstawiać mu nową wiedzę w dostępnych kategoriach. Zgodnie z tą teorią, stawiając przed dziećmi proble-

my geometryczne, dorośli zawsze powinni uważnie obserwować rozwój dziecka i jego kompetencji szczegółowych. Jeśli uznają, z dziecko jest gotowe na nową wiedzę, mogą stawiać mu zadania adekwatne do jego oczekiwań. Celem tych działań będzie przygotowanie gruntu do uczenia się geometrii na etapie szkolnym i oswojenie dzieci z zadaniami, które będą one wykonywać później; przybliżenie im ogólnych zasad, pozwalających rozpoznać napotykane w przyszłości problemy. Drogę tych poczynań powinny rozświetlać znaczące teorie psychopedagogiczne.

W procesie budowania wiedzy geometrycznej pierwszym ważnym zadaniem dorosłego staje się obserwacja dziecka i jego możliwości rozwojowych. Wskazane jest, by była ona wsparta profesjonalną pedagogiczną diagnozą umiejętności matematycznych. Osiągnięcia dziecka należy odnieść do teorii wyjaśniających rozwój, na przykład koncepcji rozwoju inteligencji J. Piageta, J. Brunera, poziomów myślenia teorii P. H. van Hielego czy Petra Vopěnki i Milana Hejný'ego. Z uwagi na konwergencję teorii P. H. van Hielego z teorią J. Piageta sensowne wydaje się odniesienie się do poziomów określonych przez P. H. van Hielego: wzrokowego, opisowego i logicznego, a szczególnie do pierwszego i drugiego poziomu oraz do reprezentacji określonych przez J. Brunera. Z punktu widzenia tych teorii droga budowania pojęcia matematycznego prowadzi bowiem od całościowego obrazu figury, poprzez jej składowe, związki między składowymi, a dopiero potem, na kolejnych etapach edukacyjnych, następuje definiowanie.

Zasadą metodyczną przyświecającą zaproponowanym w publikacji działaniom praktycznym, opisanym w rozdziale 6, będzie stwarzanie sytuacji dydaktycznych umożliwiających intuicyjne, całościowe uchwycenie relacji między fizycznymi przedmiotami. Istotne dla praktyki będzie stwarzanie okazji do podejmowania czynności charakterystycznych dla wzrokowego i opisowego etapu kształtowania pojęć geometrycznych. W postępowaniu dydaktycznym, w moim przekonaniu, należy kierować się zaleceniami sformułowanymi przez G. Trelińskiego:

> W pierwszej fazie staramy się, aby uczeń [także przedszkolak, B. B.-K.] uchwycił intuicyjnie sam kształt figury (poziom wizualny). Zaczynamy od zadań (gier, ćwiczeń), które sprzyjają wytworzeniu się reprezentacji enaktywnej tej figury. Zdobyte doświadczenie pozwala reprezentować kształt rozważanych przedmiotów rysunkiem lub innym środkiem dydaktycznym. To sprzyja wytworzeniu reprezentacji ikonicznej figury. Z kolei rozwiązujemy ćwiczenia, które sprzyjają wytworzeniu reprezentacji symbolicznej.
>
> Gdy ukształtują się już (w toku konkretnego działania, przedstawień rysunkowych i opisywania) struktury myślowe oraz język właściwe dla poziomu wizualnego, przechodzimy do wydzielenia własności badanej figury, kształtowania jej na poziomie opisowym. Podobnie jak poprzednio rozwiązujemy ćwiczenia sprzyjające wytworzeniu się reprezentacji enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej [...].

> Gdy ukształtują się struktury myślowe oraz język poziomu opisowego, przechodzimy do ćwiczeń ukierunkowanych na badanie związków między własnościami (poziom logiczny). I tu również ćwiczenia muszą sprzyjać wytworzeniu się reprezentacji enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej[1].

W proponowanym przeze mnie w rozdziale 6 wykazie ćwiczeń nie dokonałam wyszczególnienia, które z działań są ćwiczeniami na poziomie wizualnym, a które na poziomie opisowym. Przyjęłam założenie, że proponowane ćwiczenia przeznaczone są dla dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym, zaś rolą nauczyciela jest odpowiedni dobór zadań, zgodny z poziomem rozwoju myślenia dzieci. Dlatego poniżej odwołuję się do modelu kształtowania figury geometrycznej na poziomie wzrokowym i opisowym w opracowaniu H. Siwek. Koncentruję się na wyróżnionych dwóch poziomach, gdyż z punktu widzenia edukacji dzieci te są dla nich najbardziej typowe. W rozdziale 6 znajdują się, opracowane przeze mnie, propozycje różnych działań korelujących z propozycjami w zestawieniu przedstawionym w tab. 19.

Dziecko w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym cechuje poziom wizualny. Dlatego w tym wieku należy proponować dzieciom zadania polegające na rozpoznawaniu figur po ich kształcie w toku porównywania z takimi samymi i innymi figurami, określaniu położenia przedmiotów w przestrzeni, porównywaniu i szacowaniu. Na tym etapie istotne jest budowanie wiedzy w działaniu i działania wyobrażeniowe, np. manipulacje, poznawanie kształtów swoimi zmysłami, podejmowanie działań plastyczno-konstrukcyjnych, których efektem jest budowanie modeli i rysunków, tworzenie rzutów. Nie mniej ważne są czynności abstrakcyjne, aktywizujące dziecko intelektualnie i werbalnie. Sensowność takich poczynań potwierdza także E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska, które są zdania, że dziecko w wieku przedszkolnym znajduje się na poziomie przedpojęciowym, akceptuje kształty geometryczne: koło, kwadrat, trójkąt, prostokąt, ale tylko jako przedmioty mu znane i prawdziwe. Przykładem jest prawidłowość, że dziecko identyfikuje koło, dlatego że obserwowało i manipulowało różnymi przedmiotami, np.: talerzami, piłkami, monetą, i dzięki temu mogło je poznać[2]. Przejawem funkcjonowania dziecka na poziomie przedpojęciowym są zdolności rozpoznawania kształtów oraz elementarnych cech, które pomagają określić kolor, smak lub liczebność zbioru; uczenie się posługiwania słowami: kwadrat, sześcian, kula, trójkąt w trakcie precyzowania kształtu przedmiotów; operowanie słowami, które umożliwiają porównywanie – dłuższy, krótszy, wyższy, niższy; wiązanie poszczególnych kształtów ze znanymi przedmiotami.

1 G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna*, *3M*..., s. 166–167.
2 E. Gruszczyk-Kolczyńska, E. Zielińska, *op. cit.,* s. 125–126.

Tab. 19. Czynności związane z kształtowaniem pojęcia figury geometrycznej na poziomie wzrokowym i opisowym

Rodzaj czynności	Czynności charakterystyczne na poziomie wzrokowym	Czynności charakterystyczne na poziomie opisowym
Konkretne	– wyróżnianie kształtu w otaczającym świecie – obserwowanie i wskazywanie różnych przedmiotów (zabawek, pudełek, przedmiotów z wyposażenia, klasy i domu, budowli, narzędzi itp.) – wycinanie modelu z ziemniaka, lepienie z gliny pełnego modelu, sklejanie z papierowej siatki pustego modelu uwypuklającego powierzchnię, montowanie z patyczków modelu żeberkowego podkreślającego krawędzie i wierzchołki – kontrastowanie kształtu z innymi bryłami zrobionymi podobnie przez dziecko, posługiwanie się przykładem i kontrprzykładem – obserwowanie regularności i podobieństw na modelu pełnym, pustym, żeberkowym	– badanie kształtu ścian, krawędzi, wierzchołków, sprawdzanie, które są równe, które prostopadłe, równoległe, które ściany są przystające – obserwowanie ścian o wspólnej krawędzi, porównywanie krawędzi o wspólnym wierzchołku, ich długości, kątów nachylenia – badanie pola powierzchni i jego obliczanie przez wyklejanie ścian (np. kratkowanym papierem) oraz obliczenie objętości przy pomocy wypełniania kostkami warstwami
Wyobrażeniowe	– schematyczne przedstawianie figury na rysunku, obserwowanie jej cienia pełnego i żeberkowego na ścianie – odrysowywanie na kartonie pełnego i żeberkowego cienia figury w różnych położeniach i ustalanie odpowiedniości między krawędziami na rysunku i na modelu – rozpoznawanie figury na rysunku, odróżnianie jej rysunku od rzutu innej figury, uzupełnianie i poprawianie rysunku w prostych przykładach, przy danych niektórych krawędziach	– ustalanie odpowiedniości między ścianami, krawędziami, wierzchołkami na prostym rysunku prostopadłościanu w rzucie, na modelu i na siatce – obliczanie, z ilu kostek składają się rozmaite budowle skonstruowane z tych kostek, ale przedstawione na rysunku – obliczanie powierzchni takich budowli
Abstrakcyjne	– swobodne operowanie nazwą, opis w języku potocznym naturalnego kształtu figury, odwołanie się do wiedzy o figurze – ustalenie liczby ścian, formułowanie warunków, z ilu i jakich figur da się zbudować np. pudełko, kontrastowanie jego regularności względem innych brył	– nazywanie własności, opis przez podanie charakterystycznych cech związanych ze ścianami, krawędziami, wierzchołkami, opisanie związków między składowymi – opis czynności prowadzących do obliczania pola i obwodu, uogólnianie, formułowanie wzorów

Źródło: opracowanie na podstawie H. Siwek[3].

Dzieci w wieku przedszkolnym i w młodszym wieku szkolnym, które cechuje inteligencja konkretno-operacyjna, a wg P. H. van Hielego poziom opisowy, będą kształtowały nowe pojęcia podczas zorganizowanych obserwacji. Mogą porównywać przedmioty należące do jednej klasy z innymi, wyróżniać ich wspólne

3 H. Siwek, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa 2005, s. 52–53.

własności, spostrzegać analitycznie, by skutecznie wyodrębniać ich składowe części i własności. Struktura rozumowania, jak podkreśla H. Siwek, będzie się przejawiać w porządkowaniu przedmiotów według wspólnych cech oraz własności i będzie prowadzić do klasyfikacji, do tworzenia klas pojęciowych[4].

Na etapie wieku przedszkolnego i wczesnoszkolnego pojawiają się zaledwie początki rozumowań opartych na dedukcji i „wywiedlności" z przyjętych przesłanek, ale jest to okres powolnego kształtowania się tego rodzaju wyższego myślenia, gdyż wiek dziecięcy, mówiąc językiem H. Siwek, to typowy okres intuicyjnych odczuć i empirycznych stwierdzeń[5]. Zarówno opinia ta, jak i powyższe zasady są zgodne ze zdaniem J. Nowika, który sądzi, że „nauczanie geometrii na poziomie dzieci młodszych nie może być dedukcyjne. Powinno ono opierać się na obserwacji. Jego celem jest zrozumienie podstawowych pojęć na gruncie doświadczenia"[6]. Widać, że badacz odwołuje się do koncepcji zarówno P. H. van Hielego, jak i Petra Vopěnki i Milana Hejný'ego, akcentując poziom przedpojęciowy, kiedy kształty są atrybutami realnych obiektów i są ujmowane jednym aktem percepcji.

Podsumowując: budowanie wiedzy geometrycznej na etapie elementarnym wymaga działań na poziomie wizualnym, dla których typowe jest obserwowanie, manipulowanie, rozpoznawanie na rysunku, rysowanie, opisywanie. Tego typu działania, jak obserwacja kształtów, ich wzajemnego położenia, zmian w położeniu, zmian w kształtach, stanowi, zdaniem Z. Krygowskiej, bogaty materiał doświadczeń, który prowadzi od naiwnego schematyzowania geometrycznego do coraz bardziej abstrakcyjnego opisu stosunków przestrzennych[7]. Podstawą budowania intuicji geometrycznych, tworzenia ich intuicyjnych obiektów myślowych jest też rozwijanie u dzieci zdolności porównywania, sprawne dostrzeganie przez nie wspólnych obiektów, grupowanie elementów podobnych do siebie pod względem wielkości, kształtu, doświadczenia w klasyfikowaniu i porządkowanie elementów pod względem wybranej cechy jakościowe. Zasadę główną stanowi, by nauczanie geometrii miało charakter poglądowo-intuicyjny, by było „oparte na bezpośrednim manipulowaniu, spostrzeganiu i wyobrażeniach, a uczeń miał możliwość składania i rozkładania, wycinania, zginania, przykładania, modelowania i przekształcania"[8].

---

[4] H. Siwek, *Dydaktyka...*, s. 51.

[5] *Ibid.*, s. 52.

[6] J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej,* s. 133.

[7] Z. Krygowska, B. Nowecki, *Kształtowanie pojęć geometrycznych u dziecka* [w:] Z. Semadeni (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 2, WSiP, Warszawa 1984, s. 43.

[8] R. Reclik, *Wspieranie aktywności geometrycznej dzieci w młodszym wieku szkolnym* [w:] W. Puślecki (red.), *Wspieranie rozwoju dzieci w procesie wczesnej edukacji*, Wrocław 2008, s. 272–273.

Istotne jest także, aby dorosły wprowadzający dziecko w świat geometrii pamiętał właściwie o trzech światach: „własności przestrzennych materialnych przedmiotów; rysunkowych schematów, w których zachowujemy tylko niektóre z tych własność, oraz abstrakcyjnych pojęć pomyślanych tylko wyidealizowanych cech tego, co obserwujemy”[9].

Ten ostatni świat jest najbliższy pełnemu rozumieniu pojęć geometrycznych, ale nie ma do niego dostępu bez postępowania zgodnie z metodą czynnościową. Założeniem takiego nauczania będzie ustalenie, jakie czynności fizyczne mogą stanowić poprawną merytorycznie i dydaktycznie podstawę dla kształtowania określonych pojęć oraz zorganizowanie tych czynności tak, aby następowała stopniowa interioryzacja, czyli przekształcanie ich w czynności umysłowe. Przykłady takich rozwiązań czytelnik znajdzie w rozdziale 6.

5.2. KONTEKSTY AKTYWNOŚCI GEOMETRYCZNEJ[10]

Każdy człowiek rozwija się w wewnętrznym i zewnętrznym kontekście, warto więc rozważyć konteksty aktywności geometrycznej dziecka, których elementy mogą wyznaczać i budować strategie działań edukacyjnych.

Wewnętrzny kontekst aktywności geometrycznej stanowi przedmiot rozważań W. A. Krutieckiego[11], który wskazuje na pewne cechy osobowości dziecka, warunkujące powodzenie w matematycznej działalności. Należą do nich:

- aktywny i pozytywny stosunek do matematyki, przejawiający się w silnych zainteresowaniach (zamiłowaniu) i zajmowaniu się tą dziedziną;
- pracowitość, dobra organizacja działań, samodzielność, silne dążenie do celów i ich stałość, silne motywy poznawcze, radość tworzenia, odczuwanie zadowolenia ze stanu napięcia, jakie towarzyszą temu procesowi;
- zdolność koncentracji i doskonałe samopoczucie w trakcie pracy;
- określony stan wiedzy, umiejętności i nawyków;

---

9 J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie...*, s. 134.

10 Podrozdział ten został częściowo opracowany na podstawie mojego artykułu zamieszczonego w materiałach pokonferencyjnych: B. Bilewicz-Kuźnia, *The essence of ways and conditions in which children explore the word of geometry, Komplexnos a integrita w predprimárnej, primárnej, a specialnej edukcji*, Zborník příspěvkow s mezinárodnou účaststou konanej 20–22 septembra 2012 na Pedagogickiej falulte Prešovskej univerzity v Prešove, A. Prídavková, M. Klimovič (eds.), Prešov 2012, s. 227–34.

11 B. Łubianka, *Wokół uzdolnień matematycznych – przegląd badań*, s. 193.

- indywidualne sensoryczne oraz intelektualne cechy sfer osobowości warunkujące istnienie zdolności matematycznych.

Pierwsze wyszczególnione cztery cechy W. A. Krutiecki określa jako warunki do działalności matematycznej, ostatnia grupa decyduje o zaistnieniu zdolności matematycznych, które tworzą strukturę zwaną przez badacza syndromem matematycznych zdolności.

Rozpatrując warunki sprzyjające rozwojowi intuicji geometrycznych dziecka w przedszkolu, trzeba mieć na uwadze na pierwszym miejscu warunki emocjonalne potrzebne do ujawnienia się każdej aktywności. Są to: odpowiedni klimat dla podejmowania przez dziecko różnych działań wypływających z jego własnej woli, ciekawości, motywacji wewnętrznej – realizacja potrzeby bezpieczeństwa, akceptacji, szacunku[12] oraz warunki materialne, tworzące **zewnętrzny kontekst aktywności geometrycznej dziecka**, czyli odpowiednio zorganizowana i dostępna dla dziecka przestrzeń, czas, którym może swobodnie dysponować, bogactwo i różnorodność przedmiotów: materiałów, zabawek, rekwizytów, przyborów, które może dobrowolnie wykorzystywać w swojej działalności.

Kontekst zewnętrzny tworzy otoczenie fizyczne i środowisko społeczne, w tym środowisko wychowawcze. Na otoczenie fizyczne składają się różnorodne przedmioty, wytwory ludzi oraz sami ludzie, jako źródła stymulacji fizycznej i społecznej. Otoczenie społeczne sprawia, że dziecko wchodzi w stosunki z sytuacją nie bezpośrednio, ale za pośrednictwem drugiej osoby, staje się inne w zależności od sytuacji, a inni ludzie lub sytuacje nadają mu nowe znaczenie[13].

Placówki edukacyjne są dla dziecka specyficznym, bogatym i różnorodnym źródłem nowych informacji, są tzw. środowiskiem informacyjnym. Nowe przedmioty, osoby, sytuacje i informacje, mające dla dziecka znaczenie, stymulują tzw. aktywność własną, wewnętrznie motywowaną lub twórczą, ta z kolei powoduje nabywanie określonych umiejętności i kompetencji.

Kontekst ten badał J. Piaget, akcentował on rolę dorosłego i konieczność brania przez niego odpowiedzialności za jakość środowiska dostępnego dziecięcej eksploracji oraz wymóg kompetencji w rozpoznawaniu możliwości poznawczych dziecka[14].

Kontekst zewnętrzny podejmowanej aktywności związany jest z takimi oddziaływaniami, jak:

1. Tworzenie przestrzeni do działania.
2. Organizowanie czasu.

12 S. Guz, *Edukacja przedszkolna w okresie przemian*, WSP TWP, Warszawa 1996, s. 59.
13 A. Brzezińska, *Społeczna...*, s. 198.
14 D. Klus-Stańska, *Światy dziecięcych znaczeń,* Wyd. Akademickie Żak, Warszawa 2004.

3. Dostarczanie lub umożliwianie dostępu do odpowiednich materiałów jako środków realizacji celów.
4. Ingerowanie w aktywność rozwijającej się jednostki[15].

Przestrzeń do geometrycznego działania

Dla zapewnienia dzieciom warunków do rozwoju aktywności geometrycznej nauczyciel powinien zorganizować wydzielony w sali bądź innym miejscu w przedszkolu czy szkole ośrodek (kącik) geometryczny (lub szerzej – matematyczny czy naukowo-eksperymentalny), w którym znajdą się przedmioty przeznaczone do pobudzania aktywności geometrycznej.



▪ Fot. 30. Ośrodek naukowo-eksperymentalny w przedszkolu w Brixen we Włoszech[16]

Ośrodki matematyczne mogą być zorganizowane jako wydzielone miejsca w sali przedszkolnej lub oddzielne pomieszczenia badawcze. Najważniejsze jest, by zapewnić w nich dzieciom bezpośredni dostęp do różnorodnych materiałów i pomocy, wyzwalających aktywność o charakterze odtwórczym i twórczym. W kąciku geometrycznym mogą znaleźć się przykładowo materiały ukazane w tabeli 20.

---

15 A. Brzezińska, *Społeczna...*, s. 200.
16 Fotografie 30–36b pochodzą z archiwum autorki.





▪ Fot. 31, 32. Ośrodki matematyczne w Niepublicznym Przedszkolu „Motylek” w Lublinie

Tab. 20. Proponowane środki dydaktyczne w ośrodku naukowo-eksperymentalnym

Rodzaj materiału dydaktycznego	Środki dydaktyczne
1	2
Zabawki i klocki	piłki różnej wielkości, klocki drewniane, kulki kauczukowe, klocki Reko, Eccolo, puzzle Happy Cube, konstrukcyjne klocki Bambino, Tantrix, klocki magnetyczne Magnetix, klocki Xeo
Materiały do manipulacji, układania i konstruowania	guziki, pionki, spinacze, klamerki do bielizny, banknoty i monety, kamienie, minerały, kafelki do układania mozaik, patyczki, pojemniki różnej wielkości, pudełka różnej wielkości i o różnych kształtach, kapsle, kołki
Figury i bryły geometryczne	figury płaskie: koło, kwadrat, trójkąt, romb, wielokąty, wycinek koła figury przestrzenne: walec, stożek, ostrosłup, kula, graniastosłupy o różnych podstawach, w tym sześcian, czworościan foremny, prostopadłościan
Materiał przyrodniczy	liście, plansze z owadami (np. symetria), model układu słonecznego, kasztany, żołędzie, szyszki
Gry dydaktyczne i materiały edukacyjne	tangram, gry planszowe, mozaika geometryczna, cyfry, znaki matematyczne, klocki Dinesa i Cuisnera (liczby w kolorach), kostki do gry, mapy nieba, globus
Przyrządy i pojemniki	nożyczki, pojemniki z piaskiem i wodą, konewki, butelki szklane i plastikowe, słoiki o różnej pojemności, plastikowe kubeczki po produktach spożywczych, wytłaczanki, lejek, menzurki

Tab. 20, cd.

1	2
Przyrządy miernicze	sznurek, linijka, ekierka, miara krawiecka, miarka budowlana, poziomica, waga, kątomierz, cyrkiel, wiatromierz, deszczomierz, termometry, stopery, pipeta, kroplomierz
Książki pomocnicze	*Rusz głową i figurą*[1], *Kocham się uczyć*[2], *Symetryczne dyktanda graficzne*[3], *Mandale*[4], *Delfin*[5], książki uczące technik origami, np. *Nacinamy kółeczka*[6], *Filmowe origami*[7]; *Geometria dla najmłodszych*[8], *Och ta geometria*[9]
Matryce i materiały do działań plastyczno-konstrukcyjnych	materiał do cięcia i krojenia, matryce do tworzenia ornamentów i symetrii, ksero mandali, serwetki, zdjęcia, modele do kopiowania, pieczątki, szablony i kafelki do tworzenia ornamentów, parkietów i bordiur
Sprzęty i urządzenia	komputer, lupa, mikroskop, lornetka, kalejdoskop, kompasy, kalkulatory
Oprogramowanie	programy komputerowe Cabri (służący do nauki geometrii), Corel Draw (rysowanie), program do edycji tekstów
Inne pomoce	lustro, lusterka, geoplany, gumki, tasiemki, włóczka, guma, tektury, ramki, klej, farby, pędzle, sitko, dratwa

[1]M. Hinz, *Rusz głową i figurą*, Wyd. Harmonia, Gdańsk 2010; [2]J. Cieszyńska, *Kocham się uczyć. Odwracamy obrazki, aby dziecko kochało czytać, nie bało się geometrii i czytania mapy na lekcji geografii*, Wyd. Edukacyjne, Kraków 2010; [3]R. Zelker, *Symetryczne dyktanda graficzne*, Wyd. Harmonia, Gdańsk 2010; [4]*Mandale – sposób na odprężenie i wyciszenie dzieci w wieku przedszkolnym*, Jedność, Kielce 2005; [5]E. Noga, *Delfin. Trening umiejętności poznawczych*, Wyd. Klanza, Lublin 2004; [6]D. Dziamska, *Nacinamy kółeczka, czyli kiri-origami płaskie z koła*, Wyd. Bis, Płock 2010; [7]ead., *Filmowe orgiami, czyli orgiami płaskie z koła, kwadratu i trójkątna*, Wyd. Bis, Płock 2010; [8]W. Żytomirski, *Geometria dla najmłodszych*, WSiP, Warszawa 1989; [9]Z. Sporer, N. Dragic, *Och ta geometria*, Nasza Księgarnia, Warszawa 1991.

Źródło: opracowanie własne.

Materiały i środki dydaktyczne mogą być również przechowywane w szafkach, co przedstawiają fotografie poniżej. Jak ukazano na fotografiach, materiał powinien być uporządkowany, podpisany, różnorodny jakościowo i ilościowo, zachęcający do działań.

Organizowanie czasu

Stwarzając dzieciom warunki do podejmowania aktywności matematycznej, nie można pominąć aspektu czasu. Czas jest pojęciem względnym: gdy dziecko odczuwa przyjemność z wykonywanych działań, towarzyszy mu odczucie szybkiego przemijania czasu, gdy czynność jest żmudna i mozolna, często dziecko ma odczucie, że czas płynie wolno.

Organizując dzieciom działania badawcze, szczególnie samodzielne i swobodne, należy mieć na uwadze, że aby rozwinęła się i ujawniła prawdziwie twórcza aktywność, wymagany jest czas, dlatego na wykonanie niektórych zadań należy go zarezerwować więcej. Rozkład zajęć powinien również uwzględniać krótkie spotkania o charakterze zadaniowym, pozwalające dzieciom przechodzić szybko i swobodnie do innych czynności.





- Fot. 33, 34. Materiały do zabaw badawczych w przedszkolu w Brixen (płn. Włochy)





- Fot. 35, 36. Środki dydaktyczne zachęcające do działań badawczych w Niepublicznym Przedszkolu „Motylek" w Lublinie

W ramach rozwijania zainteresowań i uzdolnień matematycznych warto byłoby zorganizować jeden dzień w przedszkolu i szkole, w którym dzieci mogłyby wybierać, jakie aktywności podejmą, w jakim ośrodku będą się bawić czy rozwiązywać zadania i ćwiczenia.

Dostęp do odpowiednich materiałów jako środków realizacji celów

W kąciku badawczym dziecko ma okazję do podejmowania twórczej aktywności, która jest działalnością wewnętrznie motywowaną, podejmowaną dla przyjemności i satysfakcji lub aktywnością kierowaną przez kogoś innego. Gromadzone w ośrodku przedmioty powinny być w zasięgu wzroku i ręki dziecka, powinny zachęcać do pojmowania zadań. Istotne jest, by w kąciku znalazły się przedmioty (układanki, zadania na wpół gotowe, szablony do kopiowania czy wypełniania kolorem), zachęcające do podejmowania aktywności zarówno odtwórczej, jak i twórczej (np. kafelki do układania mozaik, parkietów, przedmioty do zabaw manipulacyjnych, waga, sznurki, miarki, poziomica, butelki, materiał przyrodniczy). Należy umożliwić dziecku swobodny dostęp do tych materiałów, poinformować dzieci, z których materiałów mogą swobodnie korzystać, środki dydaktyczne wyeksponować tak, by zachęcały do realizacji zadań badawczych, a także zagwarantować dziecku możliwość realizacji własnych pomysłów i pomysłów kolegi. Ważne jest, aby materiały gromadzone były z czynnym udziałem dzieci i ich rodziców, wskazane jest również, by dziecko wraz z rodzicem miało możliwość popracowania w takim ośrodku.

Materiały niebezpieczne lub niedostosowane do wieku dziecka należy odpowiednio zabezpieczyć.

Ingerowanie w aktywność dziecka

W celu odpowiedzi na pytanie, czy, kiedy i w jaki sposób ingerować w przebieg działalności dzieci, należy na początku ustalić, czy działania dzieci związane są z aktywnością spontaniczną (wewnętrznie motywowaną zabawą manipulacyjną lub badawczą), kierowaną (jakimi są planowe zajęcia dydaktyczne) bądź inspirowaną (zachętą, sugestią, propozycją lub zajęciami w formie projektu z dobrowolnym udziałem dzieci i często innych dorosłych, np. rodziców). Przeważnie na zajęciach dydaktycznych w toku stawiania zadań nauczyciel najbardziej ingeruje w działania dzieci i często kieruje nimi krok po kroku. Pozostałe formy pracy są bardziej otwarte i z założenia pozostawiają dzieciom i nauczycielowi dużo twórczej swobody. Drugą kwestią jest odpowiedź na pytanie, czemu ma służyć ingerencja w dziecięcą aktywność: do czego dzieci mają dojść dzięki mojej ingerencji?, Co mają sobie uświadomić?, Jaką wiedzę uzyskać?, Czemu ona ma posłużyć?

Jakiekolwiek ingerowanie w działania dziecka (wyłączając ingerencję związaną z zachowaniem bezpieczeństwa i zdrowia dzieci) powinno przejawiać się w stosowaniu pozytywnych strategii komunikacyjnych. Dorosły może stosować takie strategie, jak:

- inicjowanie i podtrzymywanie rozmowy, przejawiające się w takich komunikatach, jak: *Czym się zajmujesz?, Co ciekawego robisz?, Co to będzie?, Opowiedz o tym więcej... Czy...?*
- dziwienie się: *O, jak pięknie układasz..., Popatrz, a tutaj znalazłam/em...*
- zachęcanie: *Zachęcam cię do wykorzystania..., Może warto pomyśleć o...?, Co powiesz na wykorzystanie...?*
- stawianie pytań pobudzających do myślenia: *Jak myślisz – dlaczego?, Jak to się dzieje, że...?, Zastanawiam się..., Co zauważyliście?, Zaobserwuj, co się będzie działo?, Co mogłoby się stać?, Co musiałoby się stać, żeby..., Jak można to zmienić?*
- stawianie pytań o upodobania: *Który z tych przedmiotów podoba ci się najbardziej?, Jaki kolor (kształt) lubisz najbardziej?*
- korzystanie z okazji, by poinformować i wzbogacić wiedzę dziecka: *Czy wiesz, że...?*

Nauczyciel, stosując odpowiednie strategie komunikacyjne, uczy dzieci komunikowania się z drugim człowiekiem, jest modelem, wzorcem komunikacyjnym dla dzieci, dzięki niemu mogą one lepiej pełnić funkcję tutora.

Niekorzystne strategie komunikacyjne stosowane przez wielu dorosłych, które słyszy się jeszcze w szkole czy przedszkolu, to nieuzasadnione zakazywanie, upominanie, nakazywanie, komenderowanie, straszenie (np. szkołą czy sprawdzianem), szantaż emocjonalny, ocena osoby dziecka, a nie jego zachowania, wywieranie presji bądź stosowanie strategii jedynej poprawnej odpowiedzi.

Podsumowując: proces budowania w umyśle dziecka pojęcia geometrycznego wymaga czasu i odbywa się on na drodze badania, rozwiązywania problemów, wizualizowania, intuicyjnego wnioskowania i definiowania. Na wyższych etapach edukacyjnych, na etapie formalnego rozwijania teorii geometrycznej, potrzebuje także dowodzenia twierdzeń, wykorzystywania analogii, podejmowania indukcyjnych prób prowadzących do wykrycia pewnych własności tworów geometrycznych. Niezależnie od wieku ucznia należy pamiętać, że proces ten musi być organizowany w kategoriach dostępnych możliwościom rozwojowym uczącego się.

Mottem dla działań dydaktycznych może być przesłanie J. S. Brunera:

> Małe dzieci uczą się prawie każdej rzeczy szybciej aniżeli dorośli (pod warunkiem) jeśli można im ją przedstawiać w odpowiedniej postaci. Podawanie dzieciom materiału w zrozumiałej dla nich oraz interesującej formie wytwarza

> głębszą znajomość matematyki u samego nauczyciela, a im lepiej się ją zna, tym lepiej można jej uczyć[17].

W toku działalności edukacyjnej warto uświadomić sobie, że:

- Pierwszym nauczycielem geometrii jest bliska dziecku osoba z kręgu rodzinnego, najczęściej dorosły – matka, ojciec, babcia, ale również starsze rodzeństwo. Ich działania, czynności i zabawy są konkretnymi źródłami abstrakcyjnych pojęć matematyki, np. dziecko kształtuje sobie pojęcie wielkości, porządkując zabawki w określony sposób, rozpoznaje własności brył i figur płaskich podczas zabaw piłką czy klockami;
- Dziecko tworzy świat pojęć geometrycznych w działaniu praktycznym, poprzez manipulowanie przedmiotami, intuicyjne wnioskowanie, nazywanie swoich działań i formułowanie zadań, stawianie pytań problemowych innym dzieciom i dorosłym; droga do tego świata powinna być oparta na zabawie, na ćwiczeniach i działaniach o charakterze twórczym;
- Efektywne uczenie się elementów geometrii wymaga aktywnego udziału dziecka. Aktywność, w której dziecko uczestniczy wbrew własnej woli lub zaangażowania, nie daje dobrych wyników[18]. Należy dziecko zachęcać, ale nigdy nie przymuszać, nie wymagać, by rezygnowało z dostępnych mu sposobów rozwiązywania wszelkich problemów, w tym geometrycznych;
- Należy być cierpliwym, gdyż przejście dziecka z poziomu działań fizycznych, manipulacyjnych do działań dokonywanych w umyśle jest procesem długotrwałym, trudnym i złożonym, wymagającym różnorodnych ćwiczeń i wielokrotnych powtórzeń;
- Nie należy wymagać od dzieci operowania językiem geometrii, zanim nie zgromadzą one odpowiednich doświadczeń umożliwiających przyswojenie sobie właściwych pojęć. Dzieci, często wykorzystując bardzo dobrą pamięć, uczą się reguł i definicji (np. kwadrat ma cztery boki), a następnie powtarzają je bez zrozumienia; takie działania nie dają długotrwałego efektu;
- Należy rozwijać u dziecka cechy osobowości istotne dla sukcesów matematycznych: cierpliwość, wytrwałość i poczucie sprawstwa.

[17] Z. Sporer, N. Dragic, *Och, ta geometria,* Nasza Księgarnia, Warszawa 1991, s. 43.
[18] M. Pisarski, *Matematyka dla naszych dzieci,* Wyd. ECERI, Białystok 1992, s. 9–10.

6. PROPOZYCJE ZADAŃ O CHARAKTERZE GEOMETRYCZNYM

Niniejszy rozdział ma charakter metodyczny. Znajdują się tu propozycje zadań, zabaw i ćwiczeń przeznaczonych dla dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym. Przedstawione treści geometryczne zostały podzielone na dwie grupy. Pierwsza dotyczy pojęć i zagadnień, które w świetle zapisów podstawy programowej obowiązują na I etapie edukacyjnym, część druga obejmuje zagadnienia wykraczające poza podstawę programową i stanowi propozycje przeznaczone dla dzieci odpowiednio dojrzałych, zainteresowanych i gotowych do uczenia się. Zaproponowane zabawy, ćwiczenia lub zadania nie stanowią konsekwentnej całości, jaką w praktyce edukacyjnej stanowi konspekt czy scenariusz, bądź ich spójny cykl, ale są propozycjami, które nauczyciele, studenci i rodzice mogą wykorzystywać dowolnie, zgodnie z potrzebami dzieci i własnymi potrzebami twórczych działań edukacyjnych.

Proponowane zabawy i działania, poza nielicznymi wyjątkami, gdzie umieszczone są odwołania do źródeł, są autorskie, mają także charakter otwarty. Moim celem nie jest podawanie gotowych rozwiązań problemów ani wyznaczanie standardów metodycznych. Bardziej zależy mi, by propozycje inspirowały do indywidualnych poszukiwań metodycznych, a młodym nauczycielom pokazywały możliwe sposoby pracy z dziećmi. Z uwagi na unikatowość i kontekstualność każdej sytuacji edukacyjnej różnice indywidualne pomiędzy dziećmi, a także różne ich doświadczenia i potrzeby w procesie organizowania warunków do działań należy zachować elastyczność i czujność metodyczną, a nade wszystko własne zdanie oparte na wnikliwej obserwacji, autoobserwacji i intuicji. Zabawy i zadania można i wręcz należy swobodnie modyfikować, biorąc pod uwagę własne doświadczenia, potrzeby dziecka i teorie rozwoju pojęć geometrycznych. Warto także zaznaczyć, że kształcenie geometryczne jest znacznie szersze i bardziej pogłębione niż to proponowane. Niemniej jednak propozycje mogą stanowić treść zajęć z zakresu edukacji matematycznej, ale też językowej, plastycznej czy ruchowej; mogą być

podstawą tematyki edukacji tygodniowej w przedszkolu. Można je wykorzystywać w toku zajęć matematycznych w placówkach wychowania przedszkolnego, w toku lekcji w szkole, zajęć w plenerze, w trakcie terapii pedagogicznej czy przy tzw. okazjach, w sytuacjach okolicznościowych. Istotne jest, by nie ograniczać przestrzeni uczenia się dziecka jedynie do warunków przedszkolnych czy szkolnych, a uczynić je naturalnym i spontanicznym procesem odkrywania świata zjawisk geometrycznych.

6.1. WSTĘPNY KOMENTARZ METODYCZNY

Trudny i długotrwały proces kształtowania pojęć geometrycznych zostaje na etapie wychowania przedszkolnego i wczesnoszkolnego zaledwie zapoczątkowany, a jego bardziej systematyczny tok przypada na kolejne poziomy edukacji. Mimo to faza wstępna do etapu właściwego jest niezmiernie ważna; stąd potrzeba edukacyjnych działań przygotowawczych, wzbogacenia treści kształcenia na poziomie edukacji początkowej o elementy propedeutyki geometrii. Oto kilka zasad, które, w moim przekonaniu, mogą wpływać na efektywność wykorzystania opracowanych przeze mnie zadań i zabaw dydaktycznych o charakterze geometrycznym.

Niniejsze propozycje metodyczne są przeznaczone dla dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym. Większość z nich odnosi się do początkowego etapu edukacji, czyli wieku przedszkolnego, i jest przeznaczona szczególnie do pracy z dziećmi pomiędzy 4. a 7. rokiem życia. Taki dobór zadań związany jest bezpośrednio ze specyfiką myślenia w tym wieku, czyli z myśleniem konkretno-obrazowym, typowym dla dzieci do 5,5. roku życia. Z tego względu gros aktywności zadań ma charakter percepcyjno-manipulacyjny i psychomotoryczny. Pojawiają się tu także zadania trudniejsze, np. ćwiczenia słownikowe, definicyjne, wymagające większej dojrzałości myślenia i funkcjonowania na poziomie formalno-abstrakcyjnym; te zadania przeznaczone są dla dzieci starszych i odpowiednio dojrzałych.

Oczywiście wiek życia dziecka nigdy nie jest wyznacznikiem jego dojrzałości do uczenia się, dlatego też nauczyciel czy rodzic powinien być bacznym obserwatorem gotowości dziecka do uczenia się w zaproponowany sposób. Powinien przy tym umieć określić strefę najbliższego rozwoju dziecka, kompetencje, które już opanowało, i te, które w nim dojrzewają. Powinien znać prawidłowości rozwojowe dzieci w zakresie myślenia przestrzennego. Tu pomocna będzie koncepcja J. Piageta oraz P. van Hielego i J. Brunera (patrz podrozdz. 3.2.1). Warto odwo-

łać się także do najnowszej publikacji G. Trelińskiego *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna*, *3M Matematyka, Modelowanie, Metodyka*, gdzie autor proponuje modele ćwiczeń na poziomie wizualnym i opisowym, sprzyjające kształtowaniu się reprezentacji enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej, podkreślając, że takie serie ćwiczeń powinny być wzajemnie powiązane. Dopiero pełne przekonanie nauczyciela, że dzieci potrafią rozpoznawać, odtwarzać w rysunkach i nazywać figury geometryczne może być punktem wyjścia działań ukierunkowanych na badanie własności figury geometrycznej. Potem może nastąpić właściwe kształcenie, ukierunkowane na dokonywanie przez dzieci odkrycia geometrycznego, np. że każda figura geometryczna ma brzeg, boki, wierzchołki lub kąty. Na wyższym etapie będą więc ćwiczenia związane z badaniem własności figur geometrycznych i kształtowanie ich rozumienia, aby dostrzec, co jest najbardziej charakterystyczne dla danej figury i odróżniać ją od innych figur, np. w przypadku prostokąta, że jego brzeg składa się z 4 odcinków, że ma 4 wierzchołki, 4 kąty. Jak podaje G. Treliński – a zasady te są kluczowe dla opracowanych przeze mnie propozycji – elementy wiedzy o figurze mogą stanowić cele (wyniki) nauczania, na osiąganie których można zorientować nauczanie. Należą do nich: wyróżnianie elementów składowych figury, badanie związków między składowymi, odkrywanie dalszych własności[1].

Głównymi celami ogólnymi, czyli założonymi skutkami zaproponowanych w publikacji działań, są kształtowanie intuicji geometrycznej dzieci i pomoc w budowaniu w ich umysłach pojęć geometrycznych. Ponadto rozwijanie umiejętności matematyzowania (schematyzowania, idealizowania, wizualizowania) sytuacji opisanych słowami lub obserwowanych w otoczeniu, rozwijanie twórczej postawy wobec problemów i zadań geometrycznych. Istotą zaproponowanych zabaw dydaktycznych, zadań i ćwiczeń są działania badawcze lub twórcze, choć czasem aktywność geometryczna pojawia się przy okazji. W toku tych czynności dziecko ma okazję do doskonalenia rozumowania przestrzennego i werbalizowania własnych spostrzeżeń i myśli. Dobór zadań wynika także z założenia, że aby dziecko funkcjonowało na poziomie abstrakcyjnym, gdyż pojęcia matematyczne mają charakter abstrakcyjny, formalny, należy wcześniej zapewnić mu możliwości zdobywania bogatych bezpośrednich doświadczeń sensorycznych i badawczych. Dlatego też faza gromadzenia doświadczeń sensorycznych, nawet bez konieczności posługiwania się nazwami, czyli przeddefinicyjna, to ważny etap w procesie budowania w umysłach małych uczniów świata geometrycznego w pełnym jego bogactwie i droga do poprawnego rozumienia pojęć.

---

[1] G. Treliński, *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna*, *3M...*, s. 162–164.

Projektując sytuacje dydaktyczne nakierowane na pobudzanie aktywności dzieci oraz na rozwijanie myślenia geometrycznego, przyjęłam następujące założenia teoretyczne:

1. Geometria jako nauka jest bardzo ważnym elementem wielu kultur, istnieje w naszej cywilizacji od wieków, ma swoje źródła w przyrodzie, sztuce, muzyce, architekturze, modzie, technice; pozwala porządkować świat, umożliwia rozwiązywanie problemów praktycznych, a jej język to pomost między językiem naturalnym a językiem matematyki. Geometria jest także polem do eksperymentowania zakorzenionego w otaczającej dziecko bliższej i dalszej rzeczywistości.
2. W świat geometrii można i warto wprowadzać dziecko wcześnie, ale należy robić to świadomie i celowo, odwołując się do teorii poziomów myślenia J. Piageta, P. van Hielego, M. Hejný'ego, J. Brunera oraz koncepcji L. Wygotskiego. Szczególną uwagę należy zwrócić na kształtowanie rozmienia pojęć geometrycznych w odniesieniu do opisanego przez P. van Hielego poziomu wzrokowego, stwarzając okazje edukacyjne sprzyjające budowaniu się w umysłach dzieci trzech poziomów reprezentacji: enaktywnej, ikonicznej i symbolicznej.
3. Zawsze należy dopasować metody dydaktyczne do wiedzy dotyczącej rozwoju dziecka. Przeciętnie rozwijające się dziecko w wieku przedszkolnym i młodszym wieku szkolnym cechuje wzrokowy poziom rozumienia pojęć geometrycznych. Dla tego etapu ważne są eksploracje z przedmiotami w celu zaspokojenia naturalnej ciekawości dziecka i budowania jego wiedzy o przedmiotach. Nowe pojęcia kształtują się na tym etapie w oparciu o wrażenia i spostrzeżenia, przy czym przedmioty tej samej klasy dziecko ujmuje całościowo. Dziecko odróżnia figury geometryczne, nie znając właściwości tych figur, ale w miarę upływu czasu i wzrastającej liczby doświadczeń wkracza na kolejny, opisowy poziom, który pozwala mu postrzegać obiekty wraz z ich charakterystycznymi cechami. Dziecko buduje obraz pojęcia, a kształty geometryczne powstają w jego umyśle na podstawie obserwacji i manipulowania przedmiotami w swoim otoczeniu.
4. Prawidłowe tworzenie się obrazu (koncepcji) pojęcia geometrycznego wymaga zawsze osobistego działania dziecka w różnorodnych sytuacjach sprzyjających przekraczaniu kolejnych poziomów myślenia w sensie P. van Hielego wraz z opanowywaniem kolejno trzech rodzajów reprezentacji: enaktywnej, ikonicznej oraz symbolicznej (J. Bruner, podrozdz. 3.2.3). Dlatego nieodzowne są doświadczenia w poszukiwaniu cech figur, ich opisywaniu, abstrahowaniu, badaniu, mierzeniu właściwości w toku zróżnicowanych aktywności: sensoryczno-motorycznej, plastycznej, ruchowej, twórczej, percepcyjnej. Działania te pozwalają także wyzwalać u dziecka geometryczną twórczość.

5. Dorosły celowo i planowo organizuje środowisko uczenia się dziecka, pamiętając, że jest ono w rozwoju dziecka swego rodzaju trzecim nauczycielem i może mniej lub bardziej zachęcać do aktywności.
6. Dorosły nie może zapomnieć także o roli społecznego uczenia się, o korzystaniu z potencjału rozwojowego rówieśników, o swego rodzaju dyscyplinie wewnętrznej, którą musi posiadać, by nie kierować zbytnio poczynaniami dziecka, jeśli kompetentny rówieśnik może pomóc mu osiągnąć więcej.

Przedstawione w rozdziale 6 działania odnoszą się do wielu idei ponadczasowych i teorii pedagogicznych; na przykład w myśl koncepcji F. Frëbla i M. Montessori (patrz 2.2.1, 2.2.2) podstawą kształtowania się pojęć matematycznych są zmysły. Z tego powodu czytelnik znajdzie wśród opisanych propozycji wiele zadań rozwijających wrażliwość sensoryczną, wymagających porównywania, rozpoznawania, klasyfikowania obiektów, wyszukiwania podobieństw i kontrastów.

Zaproponowane zadania sprzyjają rozwijaniu kompetencji geometrycznej, zgodnie z koncepcją P. van Hielego (patrz 3.3.4) i określonymi w niej etapami myślenia. Sytuacje zabawowe dotyczą rozpoznawania kształtów (taki sam, inny), postrzegania tego, co jest np. na zewnętrz (wewnątrz), za (przed), nad (pod), rozróżniania kierunków, określania położenia przedmiotów w przestrzeni, szacowania na oko wielkości przedmiotów. Na tym etapie tworzy się wiedza w działaniu, budują się struktury typu: „aby otrzymać to... należy to... tak...". Kluczowe znaczenie ma więc aktywność ruchowa: manipulacje, zmysłowe poznawanie przestrzeni wraz ze stopniowym posługiwaniem się trudniejszymi pojęciami, np. prawo–lewo, a także działania psychomotoryczne – tworzą własne kompozycje realne, makiety (np. z papieru, klocków i innych materiałów plastycznych oraz przyrodniczych), wykonują schematyczne i realistyczne rysunki, budują i poprawiają różne konstrukcje, opowiadają o wzajemnym położeniu przedmiotów i osób[2].

W zaproponowanych działaniach czytelnik znajdzie działania psychomotoryczne, w toku których dzieci są zachęcane do tworzenia własnych kompozycji realnych, makiet (np. z papieru, klocków, innych materiałów plastycznych i przyrodniczych), wykonują schematyczne i realistyczne rysunki, budują i poprawiają konstrukcje, opowiadają o wzajemnym położeniu przedmiotów i osób[3]. W wykazie propozycji metodycznych znajdują się także ćwiczenia związane z mierzeniem, zapisywaniem wyników i porównywaniem miar. Ich głównym celem jest rozwijanie zdolności porównywania, porządkowania i przyporządkowywania – podstawowych operacji kształtowania się pojęć matematycznych. Takie sytuacje

---

2 G. Treliński, *Elementy geometrii w nauczaniu początkowym*, „Życie Szkoły" 2011, nr 5, s. 26.

3 *Ibidem*.

zabawowe, szczególnie na etapie edukacji wczesnoszkolnej, przygotowują dziecko do tworzenia się reprezentacji symbolicznej jego wiedzy.

W toku zabaw dydaktycznych dzieci powinny być skłaniane do przyjmowania aktywnej postawy wobec zadania czy wyszukiwania związków logicznych, podobieństw i różnic o charakterze konkretnym lub abstrakcyjnym. Takie działania są elementem rozwijania twórczego myślenia w obszarze matematyki.

Zaleca się, aby nauczyciel wykorzystujący te propozycje promował uczenie się przez działanie, wymagające odkrywania, zdobywania i stosowania wiedzy, praktykował styl nauczania określony przez G. Trelińskiego jako „posługiwanie się wytrychem" lub co najmniej stosował strategię „chodzenia po świeżych śladach" (patrz 3.4).

Wiadomo, że elementarne struktury matematyczne związane są z ściśle określonymi operacjami abstrakcyjnymi, które mogą być pobudzane, wspomagane, wyrażane przez konkretne czynności. Ich prowokowanie oraz kierowanie nimi jest ważnym elementem procesu dydaktycznego. Jest zatem oczywiste, że proces budowania wiedzy geometrycznej dzieci będzie postępował skutecznie, gdy dzieci będą miały jak najwięcej okazji do rozumowania operacyjnego na wysokim poziomie, w tym dokonywania operacji umysłowych, takich jak: porównywanie, porządkowanie, przyporządkowywanie, abstrahowanie, uogólnianie, werbalizowanie, schematyzowanie, idealizowanie, ekstrapolowanie, wizualizowanie.

Budowanie w umysłach najmłodszych matematycznego obiektu powinno odbywać się w zróżnicowanych sytuacjach, nie „typowo matematycznych", ale w toku zabaw i ćwiczeń, np. ruchowych, działań plastyczno-konstrukcyjnych, językowych, muzycznych, czy w czasie codziennych prac podejmowanych przez dzieci. Kształtowanie pojęcia staje się głównym motywem łączącym te rodzaje aktywności. Przykładowo poznając koło, dzieci będą wiązały taki kształt nie tylko z obiektem myślowym jako tworem geometrycznym, ale także z określeniami *okrągły*, *nieokrągły*, ze związkami frazeologicznymi czy modelami plastyczno-konstrukcyjnymi przedstawiającymi realne przedmioty.

Może się wydawać, że zaproponowane zadania mają mało wspólnego z celami nauczania matematyki. Takie wieloaspektowe podejście jest jednak w mojej opinii bardzo ważne i celowe w sytuacji, gdy wielostronne rozpatrywanie zjawiska geometrycznego w różnych kontekstach będzie okazją do kształtowania nie tylko kompetencji poznawczych dzieci, ale także kreatywnych. Będzie okazją do pobudzenia dzieci do myślenia, będzie stanowiło dobre przygotowanie do właściwej edukacji geometrycznej na wyższych szczeblach edukacyjnych, będzie sprzyjało ukształtowaniu pojęcia matematycznego jako idei głębokiej, niekojarzonej jedynie z konkretnymi przedmiotami. W sensie matematycznym na przykład o żadnym przedmiocie bowiem nie można powiedzieć „to jest prosta" czy „to jest trójkąt", patrząc na rysunek trójkąta, trójkątny klocek. Zadaniem nauczyciela staje się więc

stwarzanie dzieciom okazji do badania i opisywania wyglądu konkretnych przedmiotów, np. trójkątnej płytki, klocka, chusty, wyszukiwanie ich cech, wskazywanie i mówienie o nich (np. trójkątny, prosty, wierzchołek, krawędź).

Propozycje metodyczne przedstawiono w układzie tabelarycznym. W pierwszej kolumnie umieszczona jest nazwa zadania, zabawy czy działania dzieci i nauczyciela. Zadania te mają różny charakter, związane są z aktywnością badawczą, intelektualną, ruchową, plastyczną, muzyczną, werbalną, zintegrowaną, twórczą. Uznałam, że edukacja geometryczna powinna być wtopiona w system wychowania przedszkolnego lub nauczania zintegrowanego i powinna umożliwiać pełną realizację celów kształcenia opisanych podstawą programową.

W drugiej kolumnie znajdują się cele wywodzące się z celów ogólnych określonych w podstawie programowej kształcenia ogólnego w zakresie wychowania przedszkolnego i kształcenia wczesnoszkolnego oraz określonych na początku podrozdziału. Cele zadań mają charakter etapowy, dość szczegółowy, ale nie są pisane w konwencji operacyjnej, typu: „uczeń umie, uczeń potrafi". Takie formułowanie celów wymagałoby, moim zdaniem, szczegółowego precyzowania poziomu, zakresu i warunków ich realizacji. Ponadto myślę, że nauczyciel nigdy nie ma pewności, czy uczeń na pewno umie, potrafi i wie; czy osiągnie to, co nauczyciel założy sobie w konspekcie do zrealizowania na jednej jednostce metodycznej lub nawet w toku całego tygodnia. Budowanie wiedzy to proces, który wymaga czasu.

W trzeciej kolumnie wyszczególniłam pomoce i środki dydaktyczne, które nauczyciel powinien wcześniej przygotować. Poza wymienionymi środkami dydaktycznymi, szczególnie na etapie utrwalającym, zaleca się wykorzystywanie literatury dziecięcej, np. utworów: *Trójkątna bajka* D. Wawiłow; *Czarodziejskie trójkąty* M. Terlikowskiej; *Trójkątna Karolina* D. Wawiłow; *W krainie trójkątów* S. Karaszewskiego; D. Gellner *Piłka Oli*; *Halo, tu mówi Ziemia* M. Terlikowskiej; książeczki instruktażowe do wykonywania papierowych składanek, np. w opracowaniu D. Dziamskiej, P. Pawlikowskiego – *W krainie wielościanów. Zrób sobie bryłkę*[4], *Bryłki dla każdego*[5]; mozaiki, klocki płaskie i przestrzenne itp.

W czwartej kolumnie zestawienia ukazałam przejawy aktywności poznawczej, twórczej i matematycznej dziecka, pewne symptomy, wskaźniki tego, że uczestniczy ono czynnie w zajęciach i podejmuje zaproponowane przez nauczyciela działania.

W ostatniej, piątej, kolumnie zawarłam przykładowe pytania, propozycje i sugestie nauczyciela. Przedstawione tu komunikaty należy traktować jako pomocnicze wskazówki, które mają ułatwić pracę nauczycielom z małym doświadczeniem. Są one tylko propozycją, wskazują kierunek dążeń edukacyjnych nauczyciela, aby

4 P. Pawlikowski, *W krainie wielościanów. Zrób sobie bryłkę,* Wyd. Nowik, Opole 2008.
5 Id., *Bryłki dla każdego,* Wyd. Nowik, Opole 2010.

osiągnął zamierzone cele. Pytania mają różny charakter i cel, np. przez stawianie dzieciom pytań w rodzaju *Co to jest?, Jak wygląda?* bardziej zależy mi na tym, by nauczyciel określił aktualną wiedzę dzieci, nie zawsze więc takie pytania będą związane z wymogiem definiowania przez dzieci pojęcia, zwłaszcza gdy mają one mało doświadczeń. Tu raczej chodzi o orientację w poziomie rozumowania i wnioskowania wychowanków. Inne polecenia związane są z czynnościami myślowymi, takimi jak porównywanie czy klasyfikowanie. Są też takie, które odnoszą się często do instrukcji, zawierają zachętę do twórczych działań, np. *Jakie macie propozycje?*, i mają na celu wzajemną wymianę myśli w kierunku dostrzeżenia pewnych zjawisk, cech czy prawidłowości, uczą innego spojrzenia na problem; wykorzystują wartość społecznego uczenia się dzieci zgodnie z koncepcją L. Wygotskiego. Nie mniej ważna w tych działaniach jest sztuka autoprezentacji, dzielenia się z innymi swoimi spostrzeżeniami na temat wytworów pracy własnej lub pracy kolegi. Stąd po zakończeniu pracy warto zainicjować z dziećmi rozmowę, w której nauczyciel zachęci uczniów do podzielenia się doświadczeniami czy opowiedzenia o swojej pracy. Mogą być tu pomocne pytania i polecenia typu: *Opowiedzcie innym o swojej pracy? Co jest, zaprezentuj innym? Co dziś ciekawego zrobiłeś?*

Warto byłoby także wprowadzić po każdym zadaniu ocenę realizacji celów. Poleca się więc ewaluację, mającą postać np. rozmowy podsumowującej, uwzględniającej podawanie przykładów, przewidywanie, można zaprojektować np. konkursy lub gry matematyczne pozwalające ocenić stopień osiąganych umiejętności.

6.2. POJĘCIA GEOMETRYCZNE OPRACOWYWANE NA PIERWSZYM ETAPIE EDUKACYJNYM

Koło

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– rozwijanie umiejętności wielozmysłowego badania, porównywania i klasyfikowania płaskich, okrągłych przedmiotów i przedmiotów nieokrągłych	– płaskie przedmioty o okrągłym kształcie: guziki, pokrywka, wieczko od słoika, talerzyk, płyta kompaktowa, tarcza zegara – przedmioty, które nie mają okrągłego kształtu, np. długopis, spinka do włosów, pędzel, moneta, długopis, linijka, wstążka, zeszyt itp. – wycięte z materiałów o różnorodnej fakturze (np. z papieru, tektury, delikatnego papieru ściernego, folii, materiału gładkiego, szorstkiego drewna, plastiku itp.) kształty kół	– obserwowanie i badanie przedmiotów o okrągłym kształcie – oglądanie przedmiotów i klasyfikowanie ich pod względem kształtu, koloru, faktury itp. – określanie cech przedmiotu: z czego jest wykonany, czy jest duży czy mały, jaki jest w dotyku, do czego służy – posługiwanie się określeniami: brzeg, krawędź, gładki, szorstki, okrągły, nieokrągły – szukanie przedmiotów i par przedmiotów takich samych pod względem wielkości i kształtu – klasyfikowanie przedmiotów (np. na okrągłe i nieokrągłe)	– Znajdują się tu różne przedmioty. – Weźcie je do rąk, pooglądajcie, zbadajcie ich kształt. – Które przedmioty są podobne? – Znajdźcie przedmiot, który ma taki kształt – nauczyciel pokazuje np. płytę kompaktową. – Z zamkniętymi oczami poszukajcie przedmów, które mają taki kształt jak... – Jak można podzielić te przedmioty (np. okrągłe i nieokrągłe)? – Czy to jest okrągłe (np. spinka do włosów)? – Czy ten przedmiot może być w tej grupie (wskazuje na okrągłe)? – Jak inaczej można uporządkować te rzeczy?
	– rozwijanie umiejętności klasyfikowania i mierzenia długości obwodów i średnic różnych okrągłych przedmiotów	– przedmioty w kształcie kół różniące się wielkością, przyrządy miernicze: miarka krawiecka, linijka, ekierka, sznurek, itp.	– klasyfikowanie okrągłych przedmiotów, np. wg wielkości (duże, małe), koloru (kolorowe i czarno-białe), faktury (przyjemne w dotyku i nieprzyjemne) itp. – mierzenie średnic i obwodów przedmiotów, porównywanie ich długości	– Jak możemy podzielić te przedmioty? – W jaki sposób możemy je uporządkować? – Zmierzcie średnice przedmiotów, ich obwody, zapiszcie wyniki i porównajcie wartości.
	– kształtowanie umiejętności mierzenia obwodów i średnic, porównywanie ich	– krążki gimnastyczne, hula-hoopy, tasiemki, taśmy, sznurki, wstążeczki	– mierzenie, dobieranie odpowiedniej długości sznurka czy tasiemki do dłu-	– Dopasujcie tasiemki (sznurki) do krawędzi figur.

Koło, cd.

	wartości oraz dopasowywanie długości sznurka (tasiemki) do długości obwodu czy średnicy – rozwijanie umiejętności opisywania przedmiotów, posługując się określeniami: taki sam, różny, dłuższy, krótszy itp.	różnej długości odpowiadającej długości obwodu przedmiotów; wśród zgromadzonych przedmiotów znajdą się po dwa przedmioty takie same, ale i przedmioty bez pary	gości promienia, średnicy czy obwodu przedmiotów – odmierzanie sznurka o długości średnicy, obwodu, promienia	– Zmierzcie długość tasiemki, zapiszcie wyniki. – Czy każda figura ma tasiemkę tej samej długości co jej obwód? – Co zauważyłyście? – Co można zrobić, by wszystkie przedmioty miały odpowiadające im długością sznurki (tasiemki, wstążki)?
Ruchy okrągłych przedmiotów	– sprawdzanie, który z przedmiotów najłatwiej się porusza pod wpływem siły powietrza (dmuchania) – szeregowanie przedmiotów (od najłatwiej do najtrudniej przesuwających się przez podmuch powietrza) – badanie właściwości przedmiotów o okrągłym kształcie przez toczenie, rzucanie itp. – stworzenie okazji do posługiwania się pojęciami: toczy się, porusza się szybciej, wolniej, spadają itp.	– okrągłe przedmioty, np. moneta, guzik, kółko z papieru, plastikowa podstawka do doniczki, płyta kompaktowa itp.	– badanie właściwości przedmiotów przez dmuchanie, toczenie, rzucanie – działania psychomotoryczne – opisywanie właściwości przedmiotów	– Spróbujcie dmuchać w te przedmioty. – Które z nich poruszają się pod wpływem ruchu powietrza łatwiej, a które trudnej? – Uporządkujcie je w kolejności od poruszających się pod wpływem ruchu powietrza najłatwiej do poruszających się pod wpływem silnego ruchu powietrza najtrudniej. – Sprawdźcie, jak toczą się te przedmioty, – Jak zachowują się te przedmioty, gdy spadają z pewnej wysokości?
Zabawy ruchowe: Okrągłe wyspy	– doskonalenie sprawności ruchowej – ćwiczenia w wykonywaniu poleceń z użyciem okrągłych krążków – stworzenie okazji do poznania zwrotu: *W koło Macieju*	– krążki gimnastyczne	– swobodne poruszanie się w rytm muzyki, reagowanie na polecenia nauczyciela – generowanie poleceń do zabaw ruchowych z krążkami	– Gdy muzyka będzie grała, poruszacie się swobodnie pomiędzy krążkami, gdy ucichnie, wskakujecie na krążek, siadacie na krążku, kucnijcie itp. – Jak inne polecenia możecie wydać kolegom, żebyśmy nie robili *w koło* tego samego?
	– rozwijanie zdolności opisywania własnych działań przez posługiwanie się pojęciami: wysoko, nisko, na górze, na dole, pomiędzy, obok itp.	– krążki gimnastyczne	– swobodny ruch przy muzyce – odszukiwanie krążków i podnoszenie ich do góry	– Gdy muzyka będzie grała, będziecie się poruszać swobodnie pomiędzy okrągłymi krążkami, gdy muzyka ucichnie, podnieście z podłogi krążek i unieście go do góry. Nauczyciel pyta: Gdzie są krążki: wysoko czy nisko?, Nad waszymi głowami czy

				pod? Spójrzcie w dół. Co tam zostało? Toczcie krążki, gdzie jest krążek? – Wyobraźcie sobie, że krążek stał się teraz sterem okrętu. Pokażcie to, teraz jest lusterkiem, teraz zegarem. – Zaproponujcie, w jaki inny okrągły przedmiot może zamienić się w wyobraźni wasz krążek.
	– ćwiczenia orientacji przestrzennej z obręczą gimnastyczną – doskonalenie posługiwania się pojęciami: na zewnętrz, wewnątrz, przed, za, obok	– obręcze gimnastyczne	– reagowanie na sygnały i komunikaty nauczyciela w toku zadań – samodzielne generowanie komend i poleceń gimnastycznych dla innych	– Gdy muzyka będzie grała, ruszajcie się swobodnie pomiędzy obręczami, gdy ucichnie, wysłuchajcie poleceń i wykonajcie je, np.: Połóż obręcz przed sobą, Wejdź do środka obręczy. – Gdzie jesteś, w środku czy na zewnątrz? Połóż obręcz za sobą? itp. Wymyślcie polecenia dla innych.
Kółko graniaste	– rozwijanie aktywności twórczej w toku zabaw związanych w treści czy przebiegu z motywem okrągłego kształtu	– Piosenka: *Kółko graniaste, czworokanciaste kółko nam się połamało, cztery grosze kosztowało, a my wszyscy bęc.*	– dzieci stoją „w kole" i rytmicznie maszerują zgodnie z ruchem wskazówek zegara po obwodzie koła. Śpiewają piosenkę: *Kółko graniaste*. Podczas wymawiania słowa: „bęc" uczestnicy zabawy puszczają ręce i przewracają się. Po chwili podnoszą się i zabawa toczy się dalej.	– Czy ktoś wie, co to znaczy „czworokanciaste"? – Jeśli grupa stoi w kole, a jej członkowie trzymają się za ręce, w jaki sposób można zmienić kształt z okrągłego na czworokanciasty?
Dwa kółeczka[1]	– ćwiczenia orientacji przestrzennej – zaspokojenie potrzeby ruchu	– Piosenka: *Patrzcie, patrzcie jak wesoło dwa kółeczka krążą wkoło. Dwa kółeczka krążą wraz, Ach, jak to cieszy nas (bis). Rączki w górę wyciągamy, dookoła się obracamy. Jedną nóżką tupnę raz i do tego klask, klask, klask. Drugą nóżką tupnę raz i do tego klask, klask, klask.*	– czynny udział w zabawie: *Dwa kółeczka*	

Koło, cd.

Karuzela	– doskonalenie orientacji przestrzennej – zaspokojenie potrzeby ruchu – stworzenie okazji do posługiwania się określeniami *szybko–wolno* – rozwijanie aktywności twórczej – kształtowanie intuicji geometrycznej w toku zabaw z motywem kształtu koła		Zabawa polega na ustawieniu się „w kole". Co drugi uczestnik jest odwrócony tyłem. Wszyscy stoją w układzie: jedno dziecko twarzą do środka, a drugie na zewnątrz i tak dalej. Prowadzący daje uczestnikom linę związaną na końcu w pętlę, którą uczestnicy trzymają pomiędzy sobą. Przy wolnym tempie muzyki uczestnicy poruszają się wolno, przy szybkim szybciej. Na hasło „karuzela" dzieci zatrzymują się i zamieniają miejscami (ustawienie się zgodnie z poleceniem) – trzymanie liny, poruszając się cwałem zgodnie z tempem muzyki	– Jak myślicie, w jakim tempie będzie się poruszała karuzela dla malutkich dzieci, a w jakim dla starszych lub dorosłych?
Przekładanie koła za plecami	– doskonalenie umiejętności posługiwania się pojęciem *okrągły, krążyć, krążek* – rozwijanie orientacji przestrzennej przez opisywanie położenia przedmiotów w przestrzeni	– okrągły krążek lub inny okrągły przedmiot	Zabawa polega na tym, że jeden uczestnik jest w środku, pozostali siedzą „w kole". Uczestnicy podają sobie okrągły krążek za plecami (w jak najmniej widoczny sposób), mówią w tym czasie wierszyk: *Kolorowe koło mamy* *Za plecami je chowamy* *Koło krąży tu i tam. Gdzie jest koło. Pokaż nam*[2]. Kiedy skończy się wiersz, osoba ze środka odgaduje w czyich rękach ukrył się okrągły przedmiot	– Czy na pewno tam jest nasz krążek? – Jak się domyśliłeś, że ta osoba ma okrągły przedmiot?

Zabawy muzyczne	– stworzenie okazji do czynienia spostrzeżeń – opisywanie wyglądu i brzmienia instrumentów, posługiwanie się pojęciem *okrągły* – abstrahowanie kształtu: okrągły	– rzeczywiste instrumenty muzyczne: kastaniety, talerze, tamburyno oraz przedstawione na obrazkach tam-tam, banjo i inne	– opisywanie wyglądu i brzmienia instrumentów – słuchanie brzmienia instrumentów – wygrywanie rytmów	– Są tu różne instrumenty muzyczne, np.: kastaniety, talerze, tamburyn. Jakie instrumenty rozpoznajecie? Nazwijcie je. – Posłuchajcie brzmienia instrumentów, jakie instrumenty rozpoznajecie[3]. Co łączy ze sobą te przedmioty? Jakie one wszystkie są? Spróbujcie naśladować brzmienie instrumentu.
Słuchanie muzyki	– rozwijanie percepcji słuchowej w toku słuchania utworów muzycznych, w których pojawia się ten sam motyw (rondo) przeplatane kupletami – wdrażanie do uważnego słuchania muzyki poważnej	– nagrania utworów muzycznych, np. J. Haydn, Rondo z Sonaty D-Dur; L. Van Beethoven, Sonata fortepianowa c-moll op. 13 (Patetyczna), cz. II; C. Saint-Saëns, Skamieniałości z suity Karnawał zwierząt	– słuchanie i odszukiwanie powtarzających się zamkniętych odcinków muzycznych i refrenu	– Posłuchajcie uważnie muzyki. – Zwróćcie uwagę, czy wszystkie części były takie same. Czy wiecie, jak się nazywa taki powtarzający się motyw w muzyce?
Instrumenty	– rozwijanie aktywności muzycznej przez tworzenie rytmów wygrywanych na instrumencie muzycznym – talerzach – doskonalenie pojęć *okrągły*, *rytm*	– instrumenty perkusyjne	– oglądanie instrumentu, granie – zadawanie zadań rytmicznych innym	– Jak nazywa się ten instrument muzyczny (talerze)? Jaki on jest? Opiszcie (okrągły). Zagrajcie na nich. – Zaprezentujcie dowolny rytm (zadanie słuchowe do powtórzenia dla innych).
Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– stworzenie okazji do schematyzowania – matematyzacja stosunków przestrzennych	– sznurek, ołówek, tekturowa podstawka	– podejmowanie działań plastyczno-konstrukcyjnych, np. kreślenie kształtu koła za pomocą sznurka i ołówka w parach, kształtu kół różnej wielkości (zmianie ulega długość sznurka i wielkość kształtu)	– Do tekturowej podstawy wbijcie pinezkę, zawiążcie na niej sznurek, na końcu którego umocujcie ołówek. Zadanie będzie polegało na kreśleniu kół. – Jak myślicie, co należy zrobić, żeby narysować większe koło? – Jak myślicie, co należy zrobić, żeby narysować mniejsze koło? – Jaki jest kształt, gdy nitka jest krótka?

Koło, cd.

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– rozwijanie kreatywności dzieci przez działania percepcyjno-manipulacyjne – zachęcenie do składanek papierowych	– okrągłe przedmioty, gazety, szablony kół do odrysowania	– odrysowywanie kształtu koła, wycinanie go, porównywanie przedmiotów pod względem wielkości, układanie od najmniejszego do największego	– Przypomnijcie sobie lub, patrząc na wzór, narysujcie kształt wybranego okrągłego przedmiotu. – Odrysujcie kształt koła na gazecie za pomocą szablonu. – Po wykonanym zadaniu ułóżcie odrysowane kształty od najmniejszego do największego. – Jaki macie pomysł na wykorzystanie tych gazetowych kół? Nauczyciel może zachęcić do składania kształtów według pomysłów D. Dziamskiej[4]. – Do czego poza jej zwykłym zastosowaniem można wykorzystać gazetę?
	– budowanie w umysłach dzieci matematycznego schematu koła	– skakanka, sznurek, kartki, kreda, nożyczki, marker, ołówek itp.	– odrysowywanie kształtu przedmiotów, które są okrągłe, określanie, które przedmioty można wykorzystać do zilustrowania kształtu koła – tworzenie schematu koła w różny sposób i za pomocą różnych przedmiotów	– W jaki sposób i za pomocą czego można przedstawić kształt koła? – Przyjrzyjcie się tym przedmiotom: skakanka, sznurek, kartki, kreda, nożyczki, marker itp. – Jak myślicie, czym i na czym można narysować kształt koła?
	– rozwijanie twórczości plastycznej przez działania psychomotoryczne inspirowane kontaktem z okrągłym kształtem	– papier kolorowy, nożyczki, klej	– podejmowanie działań psychomotorycznych: przyklejenie okrągłego kształtu wyciętego z kolorowego papieru, – kreatywne dorysowywanie treści obrazka	– Na środku kartki przyklejcie wycięte z kolorowego papieru kółko. Waszym zadaniem jest dokończenie rysunku z wykorzystaniem naklejonego koła.

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– stworzenie okazji do schematyzowania i matematyzacji stosunków przestrzennych	– guziki, pokrywka, wieczko od słoika, płyta kompaktowa, zegar, długopis, pędzel, moneta, szklanka, talerze różnej wielkości, podstawa klepsydry, doniczka, butelka itp.	– podejmowanie działań psychomotorycznych: obrysowanie krawędzi przedmiotów, tworzenie obrazka, obrysowywanie kształtu palcem wskazującym ręki prawej i lewej, odrysowywanie – kreślenie kształtu koła za pomocą bibuły lub wstążki na patyku i w powietrzu	– Zadaniem jest obrysowanie krawędzi przedmiotów palcem wskazującym ręki prawej i lewej, przyłożenie ich na arkusz papieru i odrysowanie kształtu. Kształty te mogą tworzyć jakiś obrazek.
	– rozwijanie twórczości plastycznej inspirowanej kontaktem z przedmiotami w okrągłym kształcie	– papier, kawałki papieru kolorowego, kulki z plasteliny, skrawki materiału, czy styropian, paski papieru z niszczarki, mandale itp.	– twórcze działania percepcyjno-manipulacyjne inspirowane kształtem koła – wyklejanie kół różnymi materiałami – origami[5], kiri-origami[6], kompozycje z pasków niszczarki zwijanych w formę koła	
	– prowokowanie dzieci do działań grafo- i psychomotorycznych – rozwijanie twórczości plastycznej inspirowanej kontaktem z przedmiotami w okrągłym kształcie	– flamastry, kredki, kreda, ołówek, papier, tacki z kaszą manną itp.	– rysowanie kół po śladzie różnymi przedmiotami pisarskimi, łączenie punktów, odrysowywanie, kopiowanie – kreślenie kształtu koła na tacy z kaszą połączone ze śpiewaniem piosenki	
	– rozwijanie wyobraźni twórczej dzieci poprzez działania psychomotoryczne z wykorzystaniem mozaiki	– drewniana mozaika	– układanie wzorów z mozaiki geometrycznej – klasyfikowanie figur mozaiki geometrycznej, np. na figury okrągłe i figury nieokrągłe	– Oddzielcie koła od niekół. – Jakie znacie inne rzeczy, które nie są okrągłe. Poszukajcie ich w otoczeniu?
			– wybieranie z mozaiki geometrycznej kół i układanie ich (według wzoru lub /i z wyobraźni) – porównywanie jakości wytworów i efektów pracy	– Co można zbudować z elementów mozaiki w kształcie koła, a co z innych? – Porównajcie swoje prace.

Koło, cd.

Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie płynności skojarzeniowej i generowanie porównań kolorów do obiektów o okrągłym lub owalnym kształcie, np. czerwony jak burak	– obrazki, napisy: szczypiorek, śnieg, niebo, pomarańcza, lis, wiewiórka, węgiel, kasztany itp.	– tworzenie przez dzieci porównań – wymyślanie zagadek na temat obiektów o okrągłym kształcie	– Pokażę wam przedmioty w różnych kolorach, a wy rozpoznajcie, jaki to kolor i dokończcie zdanie... Czerwony jak... Żółty jak... Obrazki mogą wam w tym pomóc. – Zapraszam was do wymyślania zagadek. Jedno z dzieci mówi nazwę czegoś, co ma określony kolor (np. węgiel), a pozostali mówią nazwę koloru tego obiektu lub pokazują kolor (czarny).
	– ćwiczenia gramatyczno-słownikowe – rozwijanie kreatywności inspirowane określeniami: koło, okrągły – budowanie w umysłach dzieci pojęcia *koło*	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z powiedzeniami, w których pojawia się wyraz *koło* (błędne koło, koło fortuny, fortuna kołem się toczy, koło ratunkowe, piąte koło u wozu, w koło Macieju, zataczać koło, sklep koło kiosku, koło polarne, podbiegunowe, zataczać koło, koło naukowe, przyjaciół (krąg, grono), młyńskie, zębate, zapasowe, kołować, skołowany, kołacz, kołowrotek, kółko różańcowe, koło zainteresowań, gospodyń wiejskich, literackie, kołodziej, koło jako symbol w WC	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie – dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie – argumentowanie – budowanie znaczeń – wykazywanie się wiedzą i dzielenie doświadczeniami – antycypowanie	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? – Wyjaśnij, co znaczą te określenia. – Które obrazki i napisy do siebie pasują? Podajcie własne przykłady. – Jak myślicie, do czego potrzebne są ludziom koła? – Czy wiecie, kiedy wynaleziono koło? – Co by było, gdyby nie wynaleziono koła? – Czy możliwe jest, żeby koło nie zostało wynalezione?
Smak i kształty pokrojonych owoców i warzyw	– zapoznanie z pojęciami: *wzdłuż, w poprzek, ukośnie* w toku działań praktycznych – wielozmysłowe badanie smaku warzyw i owoców, określanie ich kształtów (okrągły–nieokrągły) – rozwijanie wrażliwości sensorycznej – rozwijanie umiejętności utrzymywania porządku w swoim otoczeniu	– owoce i warzywa (np. ogórek, kiwi, pomidor) pokrojone w okrągłe plastry produkty spożywcze: chleb, wędlina, ser, rzodkiewka, ogórek itp.	– badanie kształtów przez krojenie owoców i warzyw poziomo, pionowo, ukośnie, – używanie określeń: wzdłuż, w poprzek, ukośnie – próbowanie smaków owoców i warzyw – krojenie produktów spożywczych, owoców i warzyw w plastry o okrągłym kształcie	– Pokrójcie warzywa i owoce poziomo, pionowo, ukośnie. – Czy ten kawałek ma okrągły kształt? – Jaki kształt mają pokrojone produkty?

Smak i kształty pokrojonych owoców i warzyw			– robienie kanapek – przygotowanie słodkich przekąsek: (np. czekoladki, żelki, obwarzanki, ciastka), krojenie rolady – pieczenie ciastek (zagniatanie ciasta, wałkowanie, wycinanie kółeczek) – układanie krążków, precli i obwarzanków na talerzu – pieczenie kołaczy	
Zabawy ortofoniczne	– ćwiczenia świadomości własnego ciała, – utrwalanie pojęcia *okrągły* przez ćwiczenia warg i innych narządów artykulacyjnych		– ćwiczenia artykulacyjne, śpiewanie samogłoski *o* poprzez np. szerokie ziewanie; naśladowanie odgłosu karetki	– Używając swojego ciała, pokażcie jakiś ruch, w którym usta, ręce czy nogi kreślą lub wykonują okrągłe kształty.
Spacer lub wycieczka na rondo	– rozwijanie zdolności dostrzegania w otoczeniu przedmiotów, które mają okrągły kształt – rozwijanie zdolności patrzenia na świat „matematycznymi oczami”	– aparat fotograficzny, blok, kredki	– postrzeganie i odnajdywanie przedmiotów w kształcie koła (np. znaków drogowych) – robienie zdjęć – prezentacja i opisywanie fotografii – opisywanie przedmiotów w kształcie koła	– Udamy się na spacer. Będziemy spacerować chodnikiem. Waszym zadaniem będzie odnalezienie w okolicy przedmiotów, detali i innych elementów w kształcie koła, np. w architekturze, budynkach, urządzeniach, w przyrodzie (znaki drogowe, rozety na budynkach i placach, kształty skwerków, ronda, mozaiki, lustro drogowe itp.). Kiedy odnajdziecie, zróbcie zdjęcie lub narysujcie je.
	– doskonalenie zdolności rozumienia pojęcia *okrągły*, *krążyć wkoło*, *rondo* przez obserwację otoczenia – stworzenie okazji do planowej i celowej obserwacji		– obserwowanie ruchu drogowego	– Udamy się na wycieczkę na rondo. Waszym zadaniem będzie obserwowanie ruchu drogowego i zapamiętanie, jak wygląda rondo.

Koło, cd.

Wyprawa terenowa np. do pizzerii, na plac zabaw	– rozwijanie ciekawości poznawczej poprzez obserwację, poszukiwanie-przedmiotów o okrągłym kształcie i zadawanie pytań na ich temat		– oglądanie miejsca pracy i ludzi przy pracy – oszukiwanie okrągłych kształtów – zadawanie pytań	– Udamy się na wycieczkę np. do pizzerii w poszukiwaniu przedmiotów i innych okrągłych kształtów.
Rabata – praca użyteczna	– sadzenie roślin, ziół, kwiatów w okrągłej donicy lub w ogródku, kopanie, sadzenie i zasiewanie okrągłej rabaty	– nasiona, ziemia, okrągłą donica, spulchniacz, łopatka, motyczka, pazurki, widełki, picownik, spryskiwacz	– podejmowanie pracy	– Zaprojektujcie kształt i wygląd rabaty.

[1]http://miastodzieci.pl/piosenki-wiersze/110:/882:dwa-koleczka, data dostępu: 20.05.2011; [2]http://astraland.pl/index.php?s=konspekty_zajec_dla_nauczycieli&id=22, data dostępu: 20.05.2011; [3]A. Twardowska, W. Próchniewicz, *Wesołe instrumenty*, Wyd. Werset, Warszawa 2006; [4]D. Dziamska, *Nacinamy kółeczka, czyli kiri-origami płaskie z koła*, Wyd. Bis, Warszawa 2008; [5]Ead., *Bajkowe kółeczka, czyli origami płaskie z koła*, Wyd. Bis, Warszawa 2010; [6]Ead., *Nacinamy kółeczka, czyli kiri-origami płaskie z koła*.

Prostokąt

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania – rozwijanie umiejętności oglądania, określania cech, opisywania, porównywania przedmiotów – badanie – mierzenie	– przedmioty w kształcie prostokąta, np. kartka, zeszyt, papierowy banknot, flaga, deska do krojenia, książka, linijka	– odnajdywanie figur o przeciwstawnych cechach: gładki–szorstki, duży–mały, czarny–biały, miękki–twardy, miły w dotyku–nieprzyjemny w dotyku itp.	– Które przedmioty wywołują podobne wrażenia, np. są gładkie itp., a które odmienne?
	– działania percepcyjno-manipulacyjne	– płaskie klocki w kształcie różnych trójkątów	– manipulowanie dwoma trójkątami prostokątnymi, tak by powstał prostokąt	– Ułóżcie z kilku trójkątów figurę o takim kształcie (prostokąta).
	– rozwijanie umiejętności pomiaru długości, posługując się linijką, sznurkiem – porównywanie długości obiektów – generowanie pomysłów – mierzenie i zapisywanie wyników pomiaru długości	– sznurek, linijka, prostokątne i kwadratowe klocki, płytki	– mierzenie dowolnego prostokąta za pomocą sznurka (odcinanie odpowiedniej ilości sznurka, odpowiadającej długości boku i wszystkich boków, porównywanie go z długością boku kwadratu)	– Zmierzcie długość boku płytki za pomocą kawałka sznurka. – Jakiej długości jest bok? – Za pomocą jakich skrótów możemy zapisać wyniki pomiarów?
	– odnajdywanie za pomocą zmysłu dotyku par takich samych figur	– „czarodziejski woreczek", w którym są parami: duże i małe płaskie klocki w kształcie kół, prostokątów, kwadratów, trójkątów	– badanie zmysłem dotyku i odnajdywanie par klocków	– Odnajdźcie za pomocą dotyku takie same kształty.
	– wspieranie dzieci w rozwijaniu czynności intelektualnych, które stosują w poznawaniu i rozumieniu siebie i swojego otoczenia – stworzenie dzieciom okazji do przewidywania oraz łączenia przyczyny ze skutkiem	– kartki papieru różnej wielkości	– zabawa z kartką papieru – składanie kartki A-4 dwa, trzy, cztery, pięć, sześć i więcej razy, tak by po zgięciu powstało wiele kształtów prostokąta, uczestnicy liczą zgięcia i kształty	– Policzcie, ile obrazów prostokąta powstaje z różnych sposobów zginania kartki. – W jaki sposób można złożyć kartkę, by utworzył się najmniejszy prostokątny kształt. – Możecie rozłożyć kartkę i zaznaczyć pisakiem linie składania.

Prostokąt, cd.

Kształty i wrażenia	– twórcze poszukiwania zjawiska symetrii w działaniach percepcyjno-manipulacyjnych	– różnej wielkości kwadraty, lusterka, flamastry i arkusz szarego papieru	– obserwowanie odbicia kwadratu w lusterku i określanie nowego kształtu; odrysowanie figury bez jednej ścianki, przykładanie do ścianki lusterka i dorysowanie brakującej połowy prostokąta	– Weźcie figury i poszukajcie ich odbić w lustrze. – Manipulujcie tak z innymi znanymi figurami.
Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia prostokąta przez działania percepcyjno-manipulacyjne – rozwijanie umiejętności wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu, takich jak kształt i barwa w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych – rozwijanie umiejętności odczytywania sensu informacji podanych w formie uproszczonych rysunków i symboli – rozpoznawanie i nazywanie kształtu prostokąta	– kolorowe kartki papieru w kształcie prostokąta, płaskie klocki w kształcie kwadratu, słomki do napojów, pocztówki, Klocki Cuisenairea (Liczby w kolorach)[1]	– praca techniką origami – projektowanie witraży z kolorowych prostokątów – tworzenie patchworków; twórcze rysowanie itp. – obracanie dwoma płaskimi klockami w kształcie kwadratu połączonymi jednym brzegiem figur o 90° i 180° – działania konstrukcyjne z wykorzystaniem słomek do napojów, np. wg wzoru lub/i z wyobraźni – składanie prostokątnych pocztówek według cięć T. Danielewicz, A. Koźmińskiej, J. Magnuskiej[2]; – manipulowanie figurami: obracanie, składanie z małych większych, dopełnianie itp. – ułożenie dywanika z kolorowych prostokątów (dużych płaskich figur wyciętych z brystolu lub Klocków Cuisenairea (Liczb w kolorach)[3] – wykonanie wstęgi A. Möbiusa[4] i zabawa nią – tworzenie wstęgi A. Möbiusa z paska papieru – rozpoznawanie kształtu wstęgi A. Möbiusa w symbolach i znakach (symbol recyklingu, logo Renault, sztuce)	– Pooglądajcie wasze kompozycje. – Czy są takie same? Czym się różnią? Przyjrzyjcie się temu kształtowi (wstęga A. Möbiusa). – Czy już gdzieś go widzieliście? Co może oznaczać (znak recyclingu, symbol Renault, znak nieskończoności itp.)? – Weźcie dowolną pocztówkę i przetnijcie ją według własnego sposobu. – Porównajcie wasze dywaniki z Klocków Cuisenaire`a (Liczb w kolorach). Policzcie, ile figur mieści się w waszym dywanie. – Połączcie pasek papieru w różny sposób (stworzenie wstęgi Möbiusa).

			– tworzenie swojej wstęgi – tańczenie ze wstęgą	
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *prostokąt*, *prosto*, *prosty*	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z powiedzeniami, w których pojawia się wyraz *prosty*, *prostokąt* (prostownica, prostownik, kąt prosty, prostolinijny)	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie – argumentowanie – budowanie znaczeń	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? – Co znaczą? – Wyjaśnij swoimi słowami. – Które obrazki i napisy do siebie pasują? – Kto z was myśli inaczej? Kto ma inne doświadczenia?
Smak i kształty pokrojonych owoców i warzyw	– zapoznanie z pojęciami: *wzdłuż*, *w poprzek*, *ukośnie* w toku działań praktycznych – wielozmysłowe badanie smaku i określanie ich kształtów, np. prostokątny, kwadratowy, okrągły – rozwijanie wrażliwości sensorycznej – rozwijanie umiejętności utrzymywania porządku w swoim otoczeniu – wprowadzenie do ułamków	– ciasto, czekolada, wafle	– krojenie np. ciasta, wafli na prostokątne kawałki, dzielenie czekolady na różne sposoby, liczenie kostek itp.	– Pokrójcie wafle na prostokątne kawałki. – Jak można podzielić czekoladę dla 2, 4, 6, 8 osób?
W ogrodzie	– rozwijanie umiejętności mierzenia i wytyczania grządek – rozwijanie intuicji geometrycznej przez podejmowanie prac wymagających mierzenia i dzielenia – wdrażanie do utrzymywania porządku we własnym otoczeniu, wdrażanie do sprzątania po pracy	– narzędzia ogrodnicze, ziemia, plastikowe płotki, patyczki, skrzynki	– prace użyteczne polegające na wytyczaniu grządek, grodzeniu patyczkami lub plastykowym płotkiem (w przypadku braku ogródka sadzenie roślin w dużej skrzynce)	– Zaprojektujcie kształt i wygląd grządek lub kompozycję w skrzynce.

[1]H. Moroz, *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*, WSiP, Warszawa 1982; [2]D. Danielewicz, A. Koźmińska, J. Magnuska, *Terapia uspokajająca dla dzieci nerwicowych i dyslektycznych*, Polskie Towarzystwo Higieny Psychicznej, Warszawa 1984; [3]H. Moroz, *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*; [4]http://pl.wikipedia.org/wiki/wst%c4%99ga_m%c3%b6biusa, data dostępu: 30.06.2011

Kwadrat

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– rozwijanie umiejętności wielozmysłowego badania: oglądania, porównywania, wskazywania boków, kątów, wierzchołków – rozwijanie umiejętności klasyfikowania	– różnokolorowe chustki, chusteczki, szale, różnej długości patyczki, wycięte z różnych materiałów, np. różnego rodzaj papieru, tkanin, styropianu, drewna itp., kształty figur geometrycznych: koła, kwadratu, prostokąta, wielokąta, elipsy	– oglądanie – badanie – opisywanie materiału, wzoru – porównywanie – mierzenie – wyodrębnianie boków, kątów, rogów – przeliczanie – działania percepcyjno-manipulacyjne: składanie chustki na dwie, cztery i więcej części, układanie kształtu ze wszystkich chustek – działania percepcyjno-manipulacyjne – badanie cech przedmiotów, określanie ich cech jakościowych: gładki, szorstki, mały, duży itp., kwadratowy, okrągły – porównywanie przedmiotów – mierzenie długości ich boków sznurkiem, tasiemką, palcami bez konieczności nazywania – wyszukiwanie przedmiotów w kształcie kwadratu – liczenie ich – porównywanie – klasyfikowanie	– Jakie macie chustki, co możecie o nich powiedzieć? – Dotknijcie ich, porównajcie ich wielkość. – Policzcie boki, wskażcie kąty, rogi, zawiążcie na nich supełki itp. – Złóżcie je na dwie, cztery lub więcej części. – Policzcie, na ile części są złożone. – Czy chustkę o kształcie prostokątnym można złożyć tak, aby miała kwadratowy kształt? – Przyjrzyjcie się patyczkom, porównajcie ich długości, ułóżcie z nich różne kształty? – Jakie figury rozpoznajecie? – Z czego to jest wykonane? Jakie to jest w dotyku? Czy jest duże czy małe? Co możesz o tym powiedzieć? – Jak można uporządkować te przedmioty? – Jak można nazwać te grupy? – Oddzielcie takie figury (kwadraty) od innych (niekwadratów). – Wymyślcie dla nich etykietę i oznaczcie te grupy.

Kształty i wrażenia	– rozwijanie zdolności rozumienia, że kwadrat jest także prostokątem	– kwadratowa i prostokątna chusta, sznurek, ekierka	– mierzenie długości boków przez przykładanie siebie, porównywanie, mierzenie palcami, łokciem lub ekierką – odnajdywanie za pomocą ekierki kąta prostego, liczenie kątów w chustkach kwadratowych i prostokątnych	– Jakie kształty rozpoznajecie? – Czy ta chustka ma kształt kwadratu czy prostokąta? – Jakie cechy ma prostokąt? – Czy kwadrat jest prostokątem? Dlaczego?
		– papierowe chusteczki, ekierka, nożyczki	– porównywanie długości boków papierowych chustek, określanie ich kształtu, posługiwanie się określeniami *prostokątny*, *kwadratowy* – składanie chusteczek, liczenie kształtów	– Jak można udowodnić, że kwadrat to także prostokąt?
Zabawy ruchowe	– ćwiczenie motoryki – reprodukowanie kształtu kwadratu w zabawach ruchowych	– zdjęcia przedstawiające kształt kwadratu utworzony przez leżące na podłodze dzieci w zespołach cztero- lub więcej osobowych	– dobieranie się w zespoły czteroosobowe i tworzenie kształtu czworokąta z własnych ciał – tworzenie kształtu kwadratów i innych figur geometrycznych z własnych ciał	– Jak myślicie, czy można utworzyć kształt kwadratu z ośmiu osób, jak będzie wyglądał? Proponuję wam łączyć się jeszcze w większe grupy i tworzyć większe kwadraty.
		– guma o długości ok. 3 m	– formowanie z gumy kształtu figur geometrycznych, czworokąta, trójkąta itp. – wykonywanie zadań w grupie	– Podzielcie się na zespoły czteroosobowe. Za pomocą gumy utwórzcie kształty figur geometrycznych, których wy będziecie wierzchołkami. Kto został, jaki kształt może pokazać z gumy? – Jakie i ile kształtów utworzy czworo dzieci, a jakie i ile troje?
Zabawy muzyczne	– śpiewanie piosenek z dziecięcego repertuaru – rozwijanie zdolności do tworzenia improwizacji ruchowej	– nagrania z występami kwartetów	– oglądanie występów różnych zespołów czteroosobowych – tworzenie kwartetów muzycznych	– Zachęcam was do stworzenia czteroosobowego zespołu i zaprezentowania jakiejś piosenki lub do udziału w konkursie piosenki.

Kwadrat, cd.

Zabawy muzyczno-ruchowe: Mam chusteczkę haftowaną	– rozwijanie kompetencji społecznych dzieci w toku wspólnej i zgodnej zabawy – utrwalenie pojęcia *rogi*, liczenie do 4	– ścieżka dźwiękowa piosenki: *Mam chusteczkę haftowaną*	– śpiewanie piosenki *Mam chusteczkę haftowaną* – liczenie boków chustki, rogów itp.	– Policzcie boki chusteczki, rogi itp. – Co to znaczy *haftowana*? Czy ta chustka jest haftowana? Jakie kształty rozpoznajecie w tym hafcie?
Coś z niczego – działania twórcze	– rozwijanie regularności rytmicznych – stworzenie okazji do wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu (barwa, kształt) w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych	– stemple z ziemniaka, papier, kolorowe kartki , farba	– twórcze działania percepcyjno-manipulacyjne – praca techniką Origami[1] – drukowanie stemplem z ziemniaków kształtów figur geometrycznych, tworzenie patchworków	– Czy dostrzegacie rytmy lub jakieś regularności w swoich pracach? – Wskażcie je.
Motywy geometryczne w sztuce i architekturze	– odnajdywanie kształtu kwadratu w sztuce użytkowej, architekturze, malarstwie, rzeźbie – rozpoznawanie i nazywanie kształtu kwadratu – rozwijanie zainteresowań architekturą, rzeźbą, architekturą zieleni i wnętrz	– reprodukcje, fotografie ilustrujące dzieła sztuki, architektury, mody, gdzie występują motywy kwadratu	– oglądanie reprodukcji, malarstwa, dzieł sztuki itp. – prowadzenie rozmów – dzielenie się spostrzeżeniami i doświadczeniami	– Gdzie występuje motyw kwadratu lub inne kształty figur geometrycznych.
Słuchanie muzyki poważnej	– stworzenie okazji do słuchania w skupieniu muzyki, w tym muzyki poważnej – zwrócenie uwagi na czteroczęściową budowę utworów muzycznych	– przygotowanie nagrań utworów muzycznych do słuchania i analizy: – czteroczęściowe sonaty klasyczne, np. L. van Beethoven –Koncert na skrzypce i fortepian F-dur „wiosenna” część: 1) Allegro, 2) Adagio molto esspressivo, 3) Scherzo. Allegro molto	– słuchanie – branie udziału w rozmowie na temat utworów	– Posłuchajcie uważnie muzyki. – Zwróćcie uwagę na części utworów.
		4) Rondo. Allegro ma non troppo J. Haydn – Symfonia D-dur nr 104. Części: 1) Adagio-Allegro, 2) Andante, 3) Menuet Allegro, 4) Finale. Allegro di molto		

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia kwadratu przez działania percepcyjno-manipulacyjne	– gazety – klocki magnetyczne	– odrysowanie na gazecie klocków w kształcie trójkątów równobocznego, prostokątnego, wycinanie ich – konstruowanie kształtu prostokąta z wyciętych z gazety trójkątnych części – konstruowanie kształtu prostokąta, czworokąta z klocków magnetycznych	– Utwórzcie nowe kształty z tych części. – Jaki kształt powstaje przez połączenie trójkątów? – Jaki kształt powstał z trójkątnych wycinków? Czy kwadrat jest prostokątem? – Czy ten (nauczyciel wskazuje na nieforemny) czworokąt to prostokąt?
	– rozwijanie umiejętności wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu, takich jak kształt i barwa, w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych	– laski gimnastyczne, goplan, gumki, szarfy, guma, patyczki, drut, włóczka, sznurek, materiały przyrodnicze, słomki, wykałaczki, patyczki do szaszłyków, taca z kaszą, przybory piśmiennicze, włóczka, klocki magnetyczne itp.	– reprodukowanie kształtu przez układanie kwadratu z lasek gimnastycznych, na goplanie z gumki, z szarf, z gumy, z patyczków, z drutu, z włóczki, ze sznurka, z materiałów przyrodniczych, ze słomek, wykałaczek, patyczków do szaszłyków, dłonią w powietrzu, na zaparowanej szybie, na plecach kolegi, na tacy z kaszą – obrysowywanie kształtu czworokątów za pomocą przyborów piśmienniczych itp. – oklejanie sznurkiem lub włóczką brzegów figury – kalkowanie – budowanie wielokątów z klocków magnetycznych	– Proponuję wam zamienianie figur na inne, które mają mniej lub więcej boków. – Spróbujcie ułożyć wasze kwadraty (małym dzieciom można mówić zagrody dla zwierząt) od najmniejszego do największego. – Która figura ma najgrubszy obwód, a która najcieńszy? – Jakie znacie inne czworokąty (romb, deltoid)?

Kwadrat, cd.

	– rozwijanie umiejętności przewidywania skutków czynności manipulacyjnych na przedmiotach – wnioskowanie o wyprowadzonych i obserwowanych zmianach – próby łączenia przyczyny ze skutkiem	– patyczki	– działania percepcyjno-manipulacyjne – werbalizowanie swoich pomysłów i działań	– Ułóż figurę z 4 patyczków. – Z 10 patyczków ułóż 3 kwadraty. Zabierz 2 patyczki, tak by został prostokąt. – Z 10 patyczków ułóż dwa kwadraty, jeden duży, drugi mały. Dołóż 2 patyczki, tak by powstały 4 kwadraty. – Jaki są możliwości ułożenia patyczków? – Jak to zrobiłeś? – Dlaczego tak zrobiłeś?
Smaki i kształty	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania kształtów – rozwijanie umiejętności dostrzegania, kontynuowania i tworzenia regularności rytmicznych według własnego pomysłu	– ser, chleb, wędlina	– robienie kanapek i koreczków z produktów krojonych w kształcie kwadratu (kroją itp.)	Nauczyciel pokazuje dzieciom koreczek, w którym widoczny jest rytm, np. chleb, ser, wędlina, ogórek, chleb, ser, wędlina, ogórek. Stawia pytanie: – Co tu można zauważyć? Proponuje robienie „rytmicznych" szaszłyków i koreczków.
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *kwadrat* i *cztery* – rozwijanie myślenia twórczego – rozwijanie myślenia matematycznego	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z powiedzeniami, w których pojawia się wyraz *kwadrat* (kwadratura koła, kwartet, kwartał, skwer, czteropak, czworaczki, czterolatek, do kwadratu)	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie – budowanie znaczeń	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? – Co znaczą? – Wyjaśnij swoimi słowami. – Które obrazki i napisy do siebie pasują? – Kto z was myśli inaczej? Kto ma inne doświadczenia? – Podajcie własne przykłady.

[1] D. Dziamska, *Magiczne kwadraty czyli origami płaskie z kwadratu,* Wyd. Bis, Warszawa 2008; ead., *Papierowa wioska smerfów czyli origami płaskie z kwadratu,* Wyd. Bis, Warszawa 2008.

Trójkąt

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania – rozwijanie umiejętności badania kształtu, określania cech opisywanych, porównywanych przedmiotów	– instrument muzyczny trójkąt, przedmioty w kształcie trójkąta, np. ekierka, płaski klocek, serek topiony, kolczyki w kształcie trójkąta, chusta trójkątna, złożona serwetka itp.	– werbalizowanie spostrzeżeń, określanie cech przedmiotu: z czego jest wykonany, czy jest duży czy mały, jaki jest w dotyku, do czego służy, posługiwanie się określeniami: brzeg, gładki, szorstki, okrągły, owalny – szukanie par takich samych przedmiotów	– Jak nazywa się ten instrument? – Jak wygląda ten instrument? – Wybierzcie spośród zgromadzonych na stole przedmiotów te, które mają podobny kształt. – W czym są podobne te przedmioty? Czym się różnią?
		– wycięte trójkątne formy z materiałów o zróżnicowanej fakturze: plastikowe, drewniane, z materiału, gąbki, folii, styropianu	– wodzenie po bokach, wierzchołkach – opisywanie cech jakościowych figury – posługiwanie się określeniami, np. brzeg, prosty, gładki, szorstki, nieokrągły, wierzchołek, bok	– Jaki jest ten materiał? Co możesz o nim powiedzieć? – Weźcie do ręki dowolną figurę, zamknijcie oczy i zapamiętajcie wrażenia, zapamiętajcie, ile ma boków, wierzchołków itp.
		– różne rodzaje trójkątnych płytek: równoboczna, równoramienna, prostokątna, rozwartokątna	– mierzenie za pomocą różnych miar: palców, linijki, miary krawieckiej, płytek – zapisywanie wyników pomiaru	– Który sposób mierzenia wydaje się wam najłatwiejszy, a który najtrudniejszy? – Który jest najbardziej dokładny, a który najmniej?
		– trójkątna płytka, trójkątna chusta złożona w kształt trójkąta dla każdego uczestnika	– badanie kształtów – wskazywanie boków, wierzchołków, kątów	– Obwiedźcie dłonią boki tej płytki. – Pokażcie, gdzie są wierzchołki, kąty, boki, rogi, – Policzcie je. – Teraz pokażcie je na chuście. – Czy wszystkie przedmioty w kształcie trójkąta mają boki, wierzchołki, rogi i kąty, czy nie?

Trójkąt, cd.

Zabawy badawcze	– rozwijanie zdolności dostrzegania cech przedmiotów i zjawisk – badanie zjawiska symetrii	– lusterka	– odbijanie w lustrze różnego typu płytek, klocków czy papierowych trójkątnych form, badanie odbicia w lustrze – próby określania figur, które są widoczne w lustrze (kwadrat, romb, deltoid) – odkrywanie i rozpoznawanie kształtów	– Jakie figury i kształty powstały? Czy je znacie?
Trójkąt jako symbol	– tworzenie warunków do dostrzegania znaków i symboli przedstawiających kształt trójkąta – rozwijanie umiejętności odczytywania i tworzenia sensu informacji podanych w formie uproszczonych rysunków i symboli	– obrazki lub zdjęcia przedstawiające znaki drogowe, piktogram WC i inne znaki wizualne z kształtem trójkąta	– odszukiwanie symboli i znaków, odszyfrowywanie znaczeń – tworzenie przekazów symbolicznych	– Jak myślicie, co oznaczają te znaki? – Spróbujcie stworzyć różne znaki na bazie trójkąta. – Jaki znaczek w kształcie trójkąta możecie wymyśleć do kącików w klasie i do swojego pokoju?
Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia *trójkąt* przez działania percepcyjno-manipulacyjne – rozwijanie umiejętności wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu, takich jak kształt i barwa, w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych	– kawałki materiałów w kształcie trójkąta – różnej długości kolorowe sznurki	– układanie kształtu trójkąta – werbalizowanie spostrzeżeń	– Jakie trójkąty ułożyłyście? – Czy są do siebie podobne? – Czym się różnią?
		– różnej długości kolorowe patyczki	– działania percepcyjno-manipulacyjne	– Weźcie tyle patyczków, by utworzyć trójkąt, przyjrzyjcie się im, porównajcie ich długości, ułóżcie z nich różne trójkąty. – Ile potrzeba patyczków do ułożenia kształtu trójkąta? Kto ma inny pomysł? – Jakie trójkąty ułożyłyście? – Czy z każdych trzech patyczków można ułożyć schemat trójkąta? – Dlaczego tak się dzieje? – Można użyć plasteliny, za pomocą której połączycie patyczki i stworzycie wierzchołki trójkąta.

		– różnej długości kolorowe patyczki	– porównywanie	– Weźcie po 9 patyczków, ułóżcie z nich jak najwięcej schematycznych trójkątów. Porównajcie swoje rozwiązania. – Jakie są możliwości stworzenia jak największej liczby trójkątów? – Jakie trójkąty ułożyłyście?
		– biały karton z bloku technicznego w formacie A-3, na którym odrysowany jest świecący schemat trójkąta	– zamalowywanie kartonu palcami, doświadczając poczucia kształtu przez działania sensoryczne	– Zapamiętajcie jak najwięcej wrażeń zmysłowych.
		– biały karton z bloku technicznego w formacie A-3, na którym przyklejone są różne figury wycięte z przezroczystej, sztywnej folii	– zamalowanie kartonu farbą, a następnie wycięcie trójkątów, porównywanie ze sobą, mierzenie ich długości za pomocą włóczki, tasiemki czy palców	– Czy wszystkie te figury to trójkąty? Czy na pewno? – Zaprojektujcie trójkątne płytki podłogowe.
		– projektowanie szalika z kolorowych trójkątów równobocznych – kolorowanie około 6 trójkątów (podzielonych na 3 części) z wykorzystaniem trzech kredek, tak by nie powtarzał się układ barw – układanie mozaiki – podłogi z trójkątów	– działania percepcyjno-manipulacyjne i psychomotoryczne: projektowanie motywu zdobniczego	– Porównajcie swoje prace. – Czy są do siebie podobne? – Czym się różnią?
		– papier, ziemniaki, listewki, sznurek, pineski	– praca techniką Origami[1] – tworzenie ornamentów z motywem trójkąta przez drukowanie stemplem z ziemniaków – tworzenie wiatraków z papierowych trójkątnych form, budowanie latawca	

Trójkąt, cd.

Słuchanie muzyki	– stworzenie okazji do słuchania w skupieniu muzyki, w tym muzyki poważnej – zwrócenie uwagi na trzyczęściową budowę utworów muzycznych	Przygotowanie nagrań utworów muzycznych o trójdzielnej formie do słuchania i analizy, np.: a) sonata – forma zawierająca trzy ogniwa (ekspozycję, przetworzenie i reprywę); słuchanie sonat: L. van Beethoven – Sonaty fortepianowe c-moll op. 10, nr 1, cz. I oraz c-moll op. 13 („Patetyczna"), cz. I; F. Schubert – Symfonia h-moll, „Niedokończona", cz. I; F. Liszt – Preludia, b) koncert klasyczny, np. L .van Beethoven – Koncert fortepianowy B-dur op 19 nr 2 Część 1) Allegro con brio, 2) Adagio, 3) Rondo. Allegro molto	– słuchanie – branie udziału w rozmowie na temat utworów – tworzenie muzyki – śpiewanie	– Posłuchajcie uważnie muzyki. – Zwróćcie uwagę na części utworów. – Spróbujcie stworzyć trójdzielną formę muzyczną lub zaśpiewać piosenkę, która ma trzy części.
	– rozwijanie umiejętności dostrzegania składu zespołu – zachęcenie do tworzenia muzyki	– nagrania z występami trio	– oglądanie występów różnych zespołów czteroosobowych – tworzenie trio	– Zachęcam was do stworzenia trzyosobowych zespołów i zaprezentowania jakiejś piosenki lub do udziału w konkursie piosenki.
	– rozwijanie umiejętności rozpoznawania instrumentów, opisywanie ich budowy – aktywne słuchanie muzyki – odtwarzanie rytmów muzycznych	– obrazki lub rzeczywiste instrumenty o trójkątnym kształcie: bałałajka, harfa[2]	– oglądanie – słuchanie brzmienia instrumentów – rozpoznawanie i nazywanie instrumentów – opisywanie budowy – wygrywanie rytmów na trójkątach	– Opowiedzcie (wymyślcie) historię wybranego instrumentu. – Jak myślisz, kto go wykonał i dlaczego, komu służył, kto go lubił, a kto nie itp.
Zabawy ruchowe	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia *trójkąt* przez działania psychomotoryczne		– działania psychomotoryczne polegające na doborze uczestników w triady i tworzeniu trójkątów z własnych ciał, rąk itp.	– Jak myślicie, czy jeśli 5 osób weźmie się za ręce, czy może utworzyć kształt trójkąta? Proponuję wam połączyć się jeszcze w większe grupy i pokazać za pomocą swoich ciał kształt jeszcze większego trójkąta. – Wskażcie boki, wierzchołki i kąty.

Motywy geometryczne w sztuce i architekturze	– odnajdywanie kształtu trójkąta w sztuce użytkowej, architekturze, malarstwie, rzeźbie – rozwijanie zainteresowań architekturą, rzeźbą, architekturą zieleni i wnętrz	– reprodukcje, fotografie ilustrujące dzieła sztuki i architektury, gdzie występują motywy oparte na trójkątnym kształcie	– oglądanie – prowadzenie rozmów – dzielenie się spostrzeżeniami i doświadczeniami – podejmowanie samodzielnie lub w grupach z pomocą rodziców poszukiwania motywów trójkąta w sztuce (kubizm)	– Gdzie jest widoczny motyw trójkąta?
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *trójkąt*, *trzy*, *trój-*, *trójka*	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z powiedzeniami, w których pojawia się wyraz *trójkąt* (np. Trójkąt Bermudzki, pleść trzy po trzy, trójdzielne, trójkołowe, trojaczki, trójwymiarowy, Trójmiasto, triatlon, 3D, trio, triada, trójząb, trójka klasowa, 3 bit, Trójca św., Trzech Króli, Triduum, trzylatek, trylogia)	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie – budowanie znaczeń	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? – Co znaczą? – Wyjaśnij swoimi słowami. – Które obrazki i napisy do siebie pasują? – Kto z was myśli inaczej? Kto ma inne doświadczenia? Podajcie własne przykłady.
Spacer – w poszukiwaniu trójkątnych kształtów	– poszukiwanie w otoczeniu przedmiotów w kształcie trójkąta – rozpoznawanie i nazywanie kształtu trójkąta		– postrzeganie i odnajdywanie przedmiotów w kształcie trójkąta (np. znaków drogowych) – robienie zdjęć – prezentacja i opisywanie fotografii	– Udamy się na spacer. Waszym zadaniem będzie odnalezienie w okolicy przedmiotów w kształcie trójkąta, w architekturze, budynkach, urządzeniach, w przyrodzie – Kiedy je odnajdziecie, zróbcie zdjęcie lub narysujcie je. – W domu będziecie mogli narysować plan spaceru.

[1] D. Dziamska, *Magiczne trójkąty, czyli origami płaskie i przestrzenne z trójkąta*, Wyd. Bis, Warszawa 2004; [2] A. Twardowska, W. Próchniewicz, *Wesołe instrumenty*, Wyd. Werset, Warszawa 2006.

Odcinek

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Zabawa tropiąca – Szukanie skarbu	– odczytywanie zapisów topograficznych	– zadania w kopertach	– wykonywanie poleceń i zadań określonych w kopertach – przemieszczanie się z jednego punktu do drugiego – kontynuowanie gry – czekanie i obserwowanie poczynań grupy, która skończy grę – gratulowanie wygranym – podziękowanie za wspólną grę	– Tu jest punkt wyjścia. Znajdziecie tu dwie koperty w różnych kolorach. Należy wybrać jedną i dalej szukać kopert tylko w takim kolorze. W kopercie znajduje się zadanie, co grupa ma robić dalej. Po drodze napotkacie kolejne zadania. Grupa, która dotrze pierwsza do ostatniego punktu, wygra i otrzyma skarb. – Zachęcam was do narysowania drogi przejścia waszej grupy.
Gwiazdozbiory	– budowanie dziecięcej wiedzy o świecie – stworzenie okazji do oglądania i analizowania konstelacji gwiazd przedstawionych na schematach lub w rzeczywistości	– albumy, książki, plansze przedstawiające układy gwiazd – patyczki, kamyki, punkty , sznurek do przedstawiania konstelacji gwiazd	– oglądanie konstelacji gwiazd w albumach, książkach, Internecie – odwzorowywanie układów gwiazd za pomocą patyczków (sznurka) i kamyków czy innego materiału przyrodniczego – tworzenie własnych schematów konstelacji gwiazd	– Odtwórzcie układ gwiazd, np. Wielka Niedźwiedzica, Orion, Pegaz itp. za pomocą patyczków i kamieni. – Wymyślcie własną konstelację gwiazd.
Szukanie odcinków w przedmiotach i ich modelach	– analiza kształtów przedmiotów płaskich i przestrzennych – szukanie odcinków i mierzenie ich	– klocki, przestrzenne i płaskie, przedmioty kuliste, różne pudełka, modele figur płaskich i przestrzennych	– wyszukiwanie odcinków przez mierzenie krawędzi	– Czy każdy z tych przedmiotów ma krawędzie? – Poszukajcie krawędzi (odcinków) najdłuższych, najkrótszych, takich samych w tych przedmiotach.
Zabawy z włóczką	– rozwijanie umiejętności badawczych: badanie, jak zmieniają się przedmioty o przekształceniach	– włóczka, sznurek, nożyczki	– odcinanie po kawałku włóczki – pokazywanie jej początku i końca – przekształcenia i wnioskowanie o zmianach	– Odetnijcie dowolnej długości kawałek. – Pokażcie jego początek i koniec. – Rzućcie go na podłogę. Teraz jest krótszy? Dlaczego (tak/nie?) – Zwińcie w kłębek. Jaki jest teraz ten kawałek? Czy zmieniła się jego długość? – Nawińcie na nadgarstki. Co zauważyłyście?

Zabawy z włóczką	– rozwijanie umiejętności dostrzegania podobieństw i różnic w zakresie długości	– włóczka, sznurek, nożyczki	– porównywanie ze sobą kawałków włóczki – wypowiadanie się na temat poczynionych spostrzeżeń	– Porównajcie wasze kawałki. – Czym różnią się odcięte przez was kawałki? – Porównajcie w parach wasze kawałki włóczki. – Co zauważyłyście? – Porównajcie z inną osobą? – Co musiałoby się stać, żeby wasze odcinki były takiej samej długości?
	– rozwijanie umiejętności wnioskowania o wyprowadzonych zmianach	– włóczka, sznurek, nożyczki	– cięcie kawałka włóczki na 3 odcinki o różnej długości	– Przetnijcie wasze kawałki włóczki na trzy różnej długości części. – Zaprezentujcie je tak: ten kawałek jest dłuższy od tego i krótszy niż ten.
	– tworzenie konsekwentnych serii	– włóczka, sznurek, nożyczki	– układanie kawałków włóczki od najkrótszego do najdłuższego	– Ułóżcie kawałki od najkrótszego do najdłuższego. – Co należy zrobić, żeby mieć trzy równej długości odcinki?
Celowanie i rzucanie	– rozwijanie koordynacji wzrokowo-ruchowej – budowanie w umysłach dzieci pojęcia *punkt*	– lotki, piłki, tarcza, tabela punktacji itp.	– rzucanie do celu – śledzenie ruchu przedmiotów – szacowanie odległości – zapisywanie punktów – liczenie – porównywanie liczebności punktów – ustalanie miejsca I–III	– Przed wami znajduje się tarcza, do której będziecie celować (lotkami, piłką itp.). Zaznaczono tu punkty od 10 do 0. Każdy z was ma 3 rzuty, będziemy liczyć punkty.
Paski papieru i linijka	– dostrzeganie podobieństw i różnic w zakresie długości – mierzenie pasków papieru za pomocą prostych sposobów i narzędzi mierniczych	– paski papieru różnej długości – przyrządy miernicze: linijki, ekierki, kątomierze, sznurek, tasiemki, miary krawieckie, cyrkle	– porównywanie długości pasków papieru – werbalizowanie spostrzeżeń – mierzenie	– Przed sobą macie paski papieru o różnej długości. Przyjrzycie się im, porównajcie je ze sobą. – Przy pomocą jakich narzędzi możemy je zmierzyć? – Zachęcam do mierzenia palcami, łokciem lub wykorzystania przyrządów mierniczych. – Jak możemy zapisać pomiary?

Odcinek, cd.

Paski papieru i linijka	– rozwijanie umiejętności wnioskowania o wyprowadzonych zmianach – rozwijanie myślenia matematycznego	– paski papieru, sznurek, tasiemki, przyrządów mierniczych	– porównywanie	– Wylosujcie teraz dwa paski papieru, sprawdźcie, czy są tej samej długości. Ćwiczenie można powtarzać z innym materiałem, np. sznurkiem czy tasiemką. – Co można zrobić, żeby były tej samej długości?
Zabawa ruchowa – Promienie słońca	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia *odcinek* przez działania percepcyjno-manipulacyjne i ruchowe	– kłębek włóczki	– udział w zabawie	– Stańcie w kole. Zapraszam jedno dziecko do środka, będzie ono słońcem. Przygotowałam dla was kłębek włóczki, jedno dziecko z koła rzuca do dziecka stojącego w środku, jego zadaniem jest odrzucić kłębek dziecku stojącemu obok. W ten sposób stworzymy słońce, a dziecko, które jest środkiem słońca, będzie „trzymało na swoich palcach promienie". – Na hasło „dzień" dzieci rozciągają włóczkę, na hasło „noc" przybliżają się do środka i tworzą księżyc w pełni, uważając na to, by nie poplątać włóczki.
Zabawa ruchowa –Droga	– rozwijanie intuicji geometrycznej – budowanie pojęcia *odcinek* przez działania percepcyjno-manipulacyjne , np. oznaczanie odległości i odcinków – poruszanie się z punktu A do punktu B, C, szacowanie odległości	– kłębek włóczki, kartoniki z wizerunkiem wielkich liter	– działania psychomotoryczne, szacowanie, mierzenie, porównywanie odległości	– Dobierzcie się po troje, stańcie w różnej odległości. Dostaniecie litery ilustrujące przystanki. Będziecie mierzyć drogę z punktu A do punktu B oraz z B do C i z A do C.
			– działania psychomotoryczne	– Zapraszam dwoje dzieci. Jedno z nich będzie trzymało włóczkę na jednym końcu, a drugie na drugim. W taki sposób oznaczymy odcinek pewnej drogi. Oznaczymy go wielkimi literami, od głosek rozpoczynających imiona dzieci. Pozostałe dzieci będą punktami i będą poruszały się w rytm muzyki. Gdy muzyka ucichnie, zadaniem pozostałych dzieci będzie stanąć blisko siebie lub trzymając się bardzo blisko za ręce, wypełnić przestrzeń między początkiem a końcem drogi.

Skoki	– określanie długości, posługując się słowami *najkrótszy*, *najdłuższy*, *dłuższy niż*, *krótszy niż* – rozwijanie zdolności mierzenia odcinków	– przyrządy miernicze: taśma miernicza, kreda	– konkurs skoków, obserwowanie skoków – mierzenie długości swoich skoków – określanie długości skoku przez posługiwanie się określeniami ogólnymi oraz jednostką miary	– Nauczyciel proponuje: Urządzimy konkurs skoków z miejsca obunóż. Ustawcie się w rzędzie. Będziemy zaznaczać długość skoku kredą. Potem zmierzymy odcinki.
Rzuty piłką lekarską	– obserwowanie przedmiotów ruchu – określanie długości, posługując się słowami *najkrótszy*, *najdłuższy*, *dłuższy niż*, *krótszy niż* – rozwijanie zdolności mierzenia odcinków	– piłka lekarska, przyrządy miernicze	– obserwowanie rzucanej piłki w ruchu – określanie długości rzutu – mierzenie	– Nauczyciel proponuje: Urządzimy konkurs rzutów piłką lekarską. Ustawcie się w rzędzie. Będziemy zaznaczać długość rzutu kredą. Potem zmierzymy odcinki.
Zabawa na powietrzu	– budowanie pojęcia *odcinek* przez działania percepcyjno-manipulacyjne, np. oznaczanie odległości i odcinków – mierzenie i porównywanie odległości – mierzenie długości odcinków – posługiwanie się jednostkami: milimetr, centymetr, metr – zapisywanie wyników pomiaru odległości – odczytywanie nazw odcinków	– sznurek, kreda, kartki, flamaster	– skupienie w jednym punkcie, na sygnał nauczyciela rozpraszanie się po sali, na kolejny sygnał stawanie w miejscu	Nauczyciel proponuje: Na środku wbiję kij i oznaczę go punktem A. Wszystkie dzieci zapraszam do środka. Na mój sygnał (gwizdek) dzieci, które będą punktami, rozbiegają się we wszystkie strony. – Z wykorzystaniem sznurka lub kredy (na twardej nawierzchni) będziecie badać odległości od środka i zapisywać nazwy (i np. miary) utworzonych odcinków. Pierwsza litera imienia dziecka będzie końcem odcinka.
Działania przy mapie	– szukanie na mapie Polski nazw miast i miejscowości	– kontur Polski, mapa Polski, napisy znanych miejscowości	– odczytywanie nazw głównych miast Polski i najbardziej znanych dzieciom miejscowości wypoczynkowych – odnajdywanie miejsca na mapie, np. miejscowości wypoczynkowej, i wyznaczanie najkrótszej trasy do wybranego celu	– W domu przygotowałyście napisy znanych wam miejscowości, miejsc, gdzie mieszka wasza rodzina, i miejsc, które już odwiedziłyście. Odczytajcie je. Spróbujcie odnaleźć je na mapie Polski. – Znajdźcie na mapie miasto Gdańsk. Wyznaczcie dwie drogi do tego miasta ze swojej miejscowości. Która droga będzie dłuższa, która krótsza? – Czy z Zakopanego do Torunia jest bliżej jechać przez Sandomierz czy przez Kielce itp. Która droga jest najkrótsza?

Odcinek, cd.

Działania przy mapie	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – mierzenie i zapisywanie wyników pomiaru odległości pomiędzy miejscami na mapie – porównywanie wyników pomiaru – osłuchanie się z pojęciami *linia prosta*, *krzywa*, *łamana*, *punkt*, *elipsa* itp.	– papier, przyrządy miernicze, markery, mapa Polski	– rysowanie konturu Polski w powiększeniu – umieszczanie na konturze przygotowanych nazw miejscowości – mierzenie w dowolny sposób (sznurkiem, linijką itp.) odległości pomiędzy miastami – mierzenie i zapisywanie wyników pomiaru odległości	– Waszym zadaniem jest narysowanie dwa razy większego konturu. Macie do dyspozycji papier, przyrządy miernicze, markery itp. – Przyklejcie swoje napisy. Może warto pomyśleć o zaznaczeniu waszych miejscowości. – Linią krzywą – falistą, zaznaczcie morze, łamaną – góry. – Zastanawiam się, co oznaczają te niebieskie koła i elipsy na mapie. Czy ktoś z was wie? – Zastanawiam się, gdzie narysujecie koła i elipsy na swojej mapie Polski? – Zachęcam was do odnalezienia jeziora, zalewu, które leży najbliżej miejscowości, gdzie mieszkacie. Narysujcie je na swoim konturze. – Jaką linią przedstawiona jest Wisła?
Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze – Budowanie modelu osiedla	– budowanie pojęcia *odcinek* przez działania percepcyjno-manipulacyjne – poznawanie sposobów graficznego ujmowania stosunków realnego świata – rozwijanie intuicji geometrycznej w zakresie odległości – rozwijanie umiejętności wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu, takich jak kształt i barwa, w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych	– kolorowe paski papieru z niszczarki	– tworzenie kompozycji z pasków papieru z niszczarki	– Waszym zadaniem jest zwijanie pasków w kształt koła i tworzenie obrazków. – Zaprezentujcie swoją pracę.
		– różnej długości słomki, patyczki, rurki, materiały odpadowe itp.	– układanie ze słomek płotków, drogi, domu, słońca itp. – układanie modelu osiedla: drogi do przedszkola, szkoły, jezdni, przejścia dla pieszych, oznaczanie najdłuższej i najkrótszej drogi	– Zbudujcie z tych słomek drogę, domy, elementy okolicy, w której mieszkacie. – Zbudujcie model osiedla. Oznaczcie najkrótsza i najdłuższą drogę do przedszkola/szkoły. Zaznaczcie przejście dla pieszych. Czy ono pomaga? W jaki sposób? Zbudujcie dookoła modelu osiedla obwodnicę. Czy droga ta będzie krótsza czy dłuższa niż przez osiedle?
		– paski papieru różnej długości i w różnych barwach	– wyplatanie z pasków papieru	– Będziecie tworzyć przeplatanki z pasków papieru. Paski jednego koloru ułóżcie pionowo, a drugiego poziomo.
		– kolorowy papier	– podjęcie, kontynuowanie i doprowadzenie do końca pracy	– Stwórzcie wachlarze według własnego pomysłu.

Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *odcinek* – budowanie pojęcia *odcinek* – nabywanie umiejętności logicznego argumentowania	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z powiedzeniami, w których pojawia się wyraz *odcinek* (odcinek czasu, odcinek drogi, serialu, odcinek – dowód wpłaty, odcinek renty)	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie – dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie – argumentowanie	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? Co znaczą? Wyjaśnij. – Które obrazki i napisy do siebie pasują? – Kto z was myśli inaczej? Kto ma inne doświadczenia?
Zabawy z kliszą filmową	– rozwijanie intuicji geometrycznej – budowanie pojęcia *odcinek* przez twórcze działania percepcyjno-manipulacyjne, językowe – rozwijanie twórczości werbalnej	– stare klisze fotograficzne– negatywy, nożyczki	– dzielenie części na kawałki – wymyślanie historii – prezentowanie opowieści innym	– Czy ktoś wie, jak się nazywa jedna część filmu, telenoweli, programu lub bajki, część która powtarza się regularnie np. raz w tygodniu? – Potnijcie klisze fotograficzne tak, jakbyście miały z nich zrobić odcinki filmu. – Wymyślcie historię, którą zilustrujecie na pasku szarego papieru, na nim oznaczcie pojedyncze okienka-klatki. Potem podzielcie je na odcinki i opowiedzcie o tym, co zdarzy się w kolejnym odcinku.

Regularności rytmiczne i zjawisko symetrii

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Szukanie symetrii w ciele człowieka	– obserwowanie budowy ciała człowieka i szukanie symetrii – rozwijanie umiejętności dostrzegania symetrii	– lustra, duży arkusz papieru, marker, nożyczki	– odrysowywanie postaci dziecka – wycinanie kształtu – składanie go wzdłuż osi pionowej, zaznaczając oś symetrii linią przerywaną – czynienie spostrzeżeń, dostrzeganie symetrii – szukanie przy pomocy lustra elementów symetrycznych w budowie swojej twarzy i ciała – obserwowanie własnej twarzy, zasłaniając jej jedną połowę, – obserwowanie regularności	– Odrysujcie jedną osobę. – Zwróćcie uwagę na regularność w budowie człowieka.
	– stworzenie okazji do rysowania drugiej połowy figury symetrycznej	– kartki z bloku rysunkowego, kredki	– rysowanie drugiej połowy figury symetrycznej	– Dobierzcie się w pary, zegnijcie kartkę pionowo na pół. Każde z was narysuje tylko połowę postaci ludzkiej i da kartkę drugiemu. Drugie dziecko też narysuje połowę bez zaglądania do rysunku kolegi. – Porównacie prace. Co ciekawego zauważycie?
	– dostrzeganie i badanie zjawiska symetrii	– lustro, napisy wyrazów, np. BOBO, KRAN, ANIA, ALA, AMBULANS, OTO, KOK, BOK, MAM, KOC, OBOK, BOB, OKO, MIM, BOLEK, KIT, TOK, SOS, SKOS, RAZ, MOC, ZEZ, BOLEC – zdjęcia, obrazki lub rzeczywiste obiekty przedstawiające: litery, cyfry, motyle z rozłożonymi skrzydłami, rośliny, kwiaty, np. tulipan, stokrotka, drzewo, płatek śniegu, i przedmioty z życia codziennego: serwetki, bieżniki, ubrania, ręczniki itp.	– badanie symetrii, asymetrii przy pomocy lustra – wykonywanie doświadczeń z lustrem – oglądanie odbić obiektów w lustrze	– Co ciekawego zauważycie? – Co nie jest symetryczne? Znajdźcie oś symetrii.

	– stwarzanie okazji do odkrywania zjawiska symetrii	– lustro, kartki	– manipulowanie – werbalizowanie spostrzeżeń Zasady: Uczestnicy ustawiają dwa płaskie lustra na białej kartce papieru – jedno obok drugiego. Na kartce pomiędzy lustrami rysują dowolną figurę lub linię, poruszają lustrami, zmieniają kąt pomiędzy nimi. Badają efekty, jakie udało się wywołać.	– Co powstało? – Co możecie o tym powiedzieć?
	– wykorzystanie kalejdoskopu w celu dostrzegania zjawiska symetrii	– kalejdoskop	– oglądanie obrazów w kalejdoskopie, dzielenie się wrażeniami, rysowanie obrazów z kalejdoskopu – opowiadanie o spostrzeżeniach, rysowanie kompozycji	– Opowiedzcie o swoich spostrzeżeniach i wrażeniach.
Zabawa ruchowa – Rzeźby	– rozwijane zdolności psychomotorycznych przez działania zespołowe		– Uczestnicy są podzieleni na zespoły. Jedna grupa tworzy rzeźbę ze swoich ciał, druga ją odwzorowuje.	– Stańcie naprzeciwko siebie i odwzorujcie rzeźbę, a potem stańcie plecami do siebie.
Zabawa ruchowa – Podpowiedzi lustra	– odwzorowywanie kształtu i położenia w przestrzeni z zachowaniem zjawiska symetrii		– Uczestnicy tworzą 3-osobowe zespoły. Dwoje kładzie się na dywanie, trzecie staje pomiędzy nimi – jest lustrem. Jedno przybiera dowolną pozycję, osoba pełniąca funkcję lustra podpowiada, jak ma się ułożyć kolega leżący po drugiej jego stronie. Dzieci zamieniają się kolejno pełnionymi rolami. Mogą także wykonywać zadanie w pozycji stojącej.	– Zachęcam do tworzenia odbić lustrzanych w pionie i poziomie.
Spacer lub wycieczka	– rozwijanie zdolności dostrzegania ornamentów i symetrii, – rozwijanie zdolności patrzenia na świat „matematycznymi oczami”	– aparat fotograficzny, blok, kredki, ołówek	– Poszukiwanie w otoczeniu ornamentów i symetrii, robienie zdjęć, kopiowanie elementów dekoracyjnych itp.	– Udamy się na spacer. Waszym zadaniem będzie znalezienie w okolicy ornamentów, dekoracji czy przykładów symetrii w architekturze, budynkach, urządzeniach, w przyrodzie itp. – Kiedy je odnajdziecie, zróbcie zdjęcie lub narysujcie je.

Regularności rytmiczne i zjawisko symetrii, cd.

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– stworzenie okazji do wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu (barwa, kształt) w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych – projektowanie prostych kompozycji z wykorzystaniem modeli figur geometrycznych	– wzory do rysowania oburęcznego, kartka, farba, tusz	– rysowanie oburęczne według określonego schematu (wodzenie palcami po gotowym wzorze), a następnie z pamięci – dokańczanie połowy rysunku – odbijanie swojej dłoni umoczonej np. w farbie na jednej połowie kartki i odbijanie jej śladu na drugiej połowie – odbicia kleksów – robienie plam z tuszu i odbijanie drugiej stronie	– Co ciekawego zauważyłyście? – Porównajcie wasze prace. Czy są takie same?
	– tworzenie motywów dekoracyjnych – ornamentów według przesunięcia równoległego, z obrotem lub bez	– gotowe schematy, zdjęcia ornamentu w postaci wstęgi, paski papieru, szablony liścia, farby	– tworzenie ornamentów w postaci wstęgi, odrysowywanie liści w różny sposób, po kolei, jako przesunięcie równoległe, lub według zasady liść i jego odbicie lustrzane itd. – liść i jego obrót o 180°. itp.	– Przyjrzyjcie się tym zdobieniom. Co zauważyłyście? – Stwórzcie podobne zdobienia przez przesunięcie równoległe lub obrót stempla bądź przez odrysowanie.
	– naśladowanie dostrzeżonych regularności i kontynuowanie ich zgodnie z odkrytą regułą	– kafelki[1] – kwadratowe kartoniki z różnymi wzorami o wymiarach co najmniej 2,5x2,5 cm. Przykłady płytek[2] 	– tworzenie parkietu – podłogi, zapełnianie płaszczyzny kartki, tworząc wzory i mozaiki	– Pooglądajcie swoje podłogi. Opowiedzcie, jak je tworzyłyście, czy była to ciężka praca?
	– rozwijanie zdolności percepcyjno-manipulacyjnych i psychomotorycznych – rozwijanie zdolności dekorowania – porównywanie przedmiotów i kształtów – badanie zjawiska symetrii	– ramki, paski grubszego papieru, tektury do wykorzystania jako zakładki, stempelki, schematy mandali, kolorowy papier	– ozdabianie za pomocą stemplowania, np. ramek, zakładek – dekorowanie sali różnymi motywami: aniołków, gwiazdek, choinek itp. – tworzenie witraży, kolorowanie i tworzenie z różnych materiałów mandali, robienie wycinanek – tworzenie kalejdoskopu[3]	– Zwróćcie uwagę na symetrię.

[1] E. Swoboda, *Regularności geometryczne w uczeniu się dzieci*, [w:] E. Swoboda, J. Guncaga (red.), *Dziecko i matematyka*, Wyd. UR, Rzeszów 2009, s. 48; [2] E. Swoboda, *Regularności geometryczne w uczeniu się dzieci*, s. 48; [3] http://wiki.wolnepodreczniki.pl/Matematyka:Gimnazjum/Symetria_osiowa_animacje, data dostępu: 30.06.2011.

6.3. POZAPROGRAMOWE ZAGADNIENIA GEOMETRYCZNE

Linia prosta, krzywa

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Zabawa z latarką – Tropienie uciekającego punktu	– matematyzowanie stosunków przestrzennych – posługiwanie się określeniami: *wysoko*, *nisko*, *na ścianie*, *na suficie*, *na podłodze* itp. – analizowanie kształtów i badanie, jak zmieniają się przy przekształceniach	– latarki	– zgaszenie światła i opuszczenie rolet, wodzenie wzrokiem za światłem – podejmowanie czynności ruchowych: wspinanie się, kucanie, skłony – ćwiczenie mięśni oka – szukanie punktów świetlnych – bawienie się światłem latarki – werbalizowanie – podjęcie zadań dodatkowych	– Poszukajcie świetlnego punktu i powiedzcie, gdzie on jest. – Opiszcie położenie światła latarki. – Jak myślicie, jaką linię tworzy światło latarki lub latarni morskiej?
Gałązki, patyki, druciki – zabawa badawcza	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania – oglądanie, określanie cech, opisywanie, porównywanie przedmiotów – posługiwanie się pojęciami *prosty*, *krzywy*, *dłuższy*, *krótszy* itp.	– dwa patyki lub dwie gałązki dla każdego dziecka	– postrzeganie kształtów – porównywanie – podejmowanie działań percepcyjno-manipulacyjnych	– Przyjrzyjcie się patykom i gałązkom. – Jakie one są? Opiszcie je. – Co możecie o nich powiedzieć? – Co to jest? Jaki jest ten patyk? – Z jakiego drzewa może pochodzić (wśród patyków powinna być gałązka wierzby)? Nauczyciel łamie patyk i pyta: – Co się stało? – Jaki teraz jest patyk? Co się zmieniło? – Jak wy możecie zmienić swoje patyki? – Jakie teraz są, a jakie były wcześniej wasze patyki?
	– rozwijanie myślenia matematycznego – posługiwanie się pojęciami *prosty*, *krzywy*	– kreatywne druciki wygięte w różne kształty	– przekształcanie kształtów drucików kreatywnych – opisywanie kształtu drucików, posługiwanie się słownictwem: *prosty*, *krzywy*	– Co możecie powiedzieć o tych kształtach? – Jak można zmienić kształt tych drutów? Czy tak samo można było zrobić z patykami? Dlaczego?

Linia prosta, krzywa, cd.

Patyki i słomki – zabawa dydaktyczna	– doświadczanie przedłużania odcinków	– patyki albo słomki do napojów lub jeśli to zadanie jest wykonywane na boisku, kolorowa i biała kreda	– przedłużanie słomek z dwóch końców w parach – przedłużanie odcinka przez rysowanie kredą dalszej drogi z dwóch stron	– Dobierzcie się w pary. Będziecie pracować w parach. Waszym zadaniem będzie konstruowanie drogi przez przedłużanie jej z dwóch końców. Wasze drogi mogą się przecinać.
Zabawy z włóczką	– budowanie w umysłach dzieci pojęć: *prosto*, *ciężar* poprzez działania percepcyjno-manipulacyjne – posługiwanie się pojęciami: *prosto*, *krzywo*	– włóczka, nożyczki	– odcinanie kawałka włóczki – przywiązywanie obciążenia (odważnik, guzik) – dokonywanie transformacji – praca w grupach – dzielenie się spostrzeżeniami	– Mam tu włóczkę (sznurek). Wy macie nożyczki. Odetnijcie sobie dowolnej długości kawałek. Do jednego końca przywiążcie ciężarek (mały odważnik, kamień, guzik). Włóczka zawiśnie pionowo. – Przy których przedmiotach zawieszonych na końcu włóczka jest najbardziej napięta? – Dlaczego tak się dzieje? – Zdejmijcie obciążenie. Ujmijcie włóczkę za jeden koniec palcem pomiędzy palcem wskazującym i kciukiem. Upuśćcie na podłogę. Co powstało? Czy kształt jest prosty, czy krzywy?
Układanie pajęczyny – psychomotoryczne działania twórcze	– stworzenie okazji do rozumienia zjawiska przecinania się – doskonalenie pojęć: *para*, *naprzeciwko*	– włóczka, sznurek, nożyczki, klej, kartka	– zgodne współdziałanie w parach – układanie i przyklejanie utworzonej pajęczyny – dorysowywanie, np. pająka, strychu – odpowiadanie na pytania – wymyślanie przygody pająka	– Dobierzcie się w pary. Stańcie naprzeciwko siebie i naciągnijcie swoje kawałki włóczki, trzymając po jednym końcu. – Włóczka naciągnięta między wami jest położona poziomo. Czy ktoś wie, jak trzymać włóczkę pionowo? – Co należy zrobić, żeby wasze rozciągnięte kawałki włóczki przecinały się? – Czy dwa kawałki włóczki mogą się przecinać w kilku miejscach? – W ilu miejscach mogą się przecinać trzy, cztery kawałki sznurka czy włóczki?

				– Podzielcie się na dwie grupy. Ze wszystkich kawałków ułóżcie pajęczynę. – Przyklejcie ją na kartkę. – Jakie są te pajęcze sieci? – Opowiedzcie, kto utkał tę pajęczą sieć? Jak się nazywa, gdzie mieszka, co lubi, jakich ma przyjaciół? – Możecie wymyślić jakąś jego przygodę.
Piórko i guzik – zabawy badawcze	– rozpoznawanie z zamkniętymi oczami przedmiotów i określanie ich cech – obserwowanie toru spadania przedmiotów – posługiwanie się pojęciami: *prosty tor spadania*, *krzywo*, *spiralnie*, *szybko*, *wolno*	– piórko, kawałek, waty, wacik kosmetyczny, listek papieru toaletowego, guzik, gumka, koralik, długopis, pudełko itp.	– rozpoznawanie przedmiotów – określanie cech jakościowych przedmiotów – wybieranie dwóch dowolnych przedmiotów – trzymanie ich pomiędzy palcem wskazującym i kciukiem w obydwu rękach jednocześnie – upuszczanie przedmiotów – obserwowanie spadania – werbalizowanie spostrzeżeń – rysowanie w blokach, na tablicy lub kredą na podłodze linii spadania przedmiotów	– Jaki to przedmiot? – Co możesz o nim powiedzieć – Weźcie po dwa przedmioty, trzymajcie jeden w jednej ręce, a drugi w drugie, upuszczajcie je. – Zaobserwujcie, jak spadają. – Narysujcie tor spadających przedmiotów. – Proponuję, byście zbadali, jak spadają inne przedmioty. – Zaobserwuj, co się będzie działo, kiedy będziesz dmuchał w te przedmioty. – Czy zmienią swój tor, czy będzie on miał taki kształt jak przy spadaniu? – Zaobserwuj, co się będzie działo, kiedy będziesz toczył te przedmioty
Linia ciała i włosów	– czynienie spostrzeżeń – utrwalanie pojęć: *proste*, *kręcone*, *falowane*, *sztywne*, *miękkie* itp.	– lusterka – włos koński (np. na smyczku), futro, włosy lalek, włosy zwierząt z różną sierścią – na obrazkach	– czynienie spostrzeżeń – egzemplifikowanie – posługiwanie się określeniami: *proste*, *krzywe*, *falowane* itp.	– Weźcie lusterka, przyjrzyjcie się swoim nosom. Jakie są? Proste, krzywe czy łamane? – Jakie mogą być włosy? – Opiszcie, co czujecie gdy dotykacie włosów i włosia? – Co możecie o nich powiedzieć? Które są podobne, a które całkiem inne?

Linia prosta, krzywa, cd.

Kontakt ze sztuką	– rozwijanie zainteresowań sztuką i architekturą	– reprodukcje, albumy przedstawiające dzieła z motywem różnych kresek	– oglądanie reprodukcji dzieł, w których występuje motyw linii – rozpoznawanie kształtów kresek	– Przyjrzyjcie się reprodukcjom, obrazkom i obrazom, opiszcie je. – Jakie są kreski przedstawione na obrazach? – Które prace podobają się wam i dlaczego?
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się pojęcie *linia* – budowanie w umysłach dzieci różnych znaczeń pojęcia *linia*	– obrazki, napisy, fotografie związane ze słowem *linia* (linia życia, linia kolejowa, elektryczna, wysokiego napięcia, gorąca linia, błękitna linia, linia autobusowa, telefoniczna, papilarna, brzegowa, graniczna, obrony, w zeszycie, melodyczna, podziału, włosów, ciała, cienka linia, wyjść na prostą)	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają te obrazki? – Co znaczą? – Wyjaśnij swoimi słowami. – Które obrazki i napisy do siebie pasują? – Kto z was myśli inaczej, kto ma inne doświadczenia? – Podajcie własne przykłady.
Zabawa tematyczna –Telefonia	– stworzenie warunków do zabawy tematycznej inspirowanej tematem linii	– skakanki, sznurki, przyniesione przez uczestników zabawy stare aparaty telefoniczne, telefony komórkowe – zabawki i rzeczywiste, karty i inne akcesoria	– projektowanie logo sieci, cennika, oferty, linii telefonicznej – bawienie się (kupowanie telefonu, prowadzenie rozmowy telefonicznej itp.) – werbalizowanie działań (linia wolna, zajęta, przeładowana, zablokowana)	– Określenie warunków zabawy, podanie instrukcji, np.: – Będziemy bawić się w Telefonię. – Waszym zadaniem jest nazwanie sieci, w której macie telefon, przygotowanie cennika połączeń, zaprojektowanie oferty.
Zabawy muzyczne	– oglądanie, słuchanie, rozpoznawanie brzmienia instrumentów, nazywanie ich[1] – grupowanie obiektów w sensowny sposób – formułowanie uogólnień	– obrazki lub rzeczywiste instrumenty muzyczne, w budowie (linii) których można odnaleźć linie proste i krzywe (skrzypce, altówka, wiolonczela, kontrabas, harfa, gitara, mandolina, lutnia, flażolet, flet prosty, obój, rożek angielski, klarnet poprzeczny, saksofon, fagot, obój, trąbka, waltornia, tuba, pikolo)	– oglądanie – opisywanie instrumentu – wyszukiwanie w jego budowie linii prostych, krzywych, – słuchanie brzmienia instrumentów – granie na instrumentach	– Proponuję podzielić te instrumenty (obrazki, napisy) na grupy (np. instrumenty strunowe, dęte i perkusyjne).

Linia w muzyce	– słuchanie muzyki i improwizowanie jej w toku kreślenia kształtów prostych, spiralnych, śrubowych, łamanych	– nagrania muzyki poważnej, rockowej, ludowej itp.	– rysowanie na kartkach różnych linii, które kojarzą się z charakterem muzyki	– Posłuchajcie muzyki. Podczas słuchania rysujcie linie, które ilustrują nastrój tej melodii, które kojarzą się wam z rytmem tej muzyki. – Jakie są wasze propozycje? Zaśpiewajcie piosenkę, a inni narysują do niej linie.
Plan drogi	– rysowanie planu własnej drogi do przedszkola lub szkoły – rozwijanie zdolności kodowania	– kartki, kredki, ołówki	– werbalizowanie – działania psychomotoryczne – tworzenie mapy	– Wyobraźcie sobie waszą drogę do przedszkola lub szkoły. Może jechaliście samochodem, a może szliście piechotą, a może rowerem, może prostą drogą, a może na skróty. Opiszcie, jaka była ta droga. Spróbujcie stworzyć jej plan.
Zabawa ruchowa	– reprodukowanie kształtu w zabawie ruchowej – ilustrowanie muzyki ruchem – utrwalenie pojęć: pionowo, poziomo, falista, łamana	– muzyka typu marsz, breakdance, orientalna	– swobodny ruch przy muzyce i wykonywanie poleceń podczas przerw – rozpoznawanie muzyki – tańczenie i spacerowanie w rytm marsza, breakdance itp. – kreślenie ciałem ósemek i fal inspirowane tańcem orientalnym	– Będziecie się swobodnie poruszać w rytm muzyki. Gdy muzyka ucichnie, waszym zadaniem będzie pokazanie ciałem kształtu linii: linia pionowa – stajemy na baczność, pozioma – kładziemy się, łamana – kilkoro dzieci tworzy linię, falistą itp. Jakie macie propozycje? – Posłuchajcie muzyki. Waszym zadaniem jest powiedzenie, jaki ruch do niej pasuje (czy ciało ma być wyprostowane, czy giętkie) i zilustrowanie tego ruchu. Zachęcam was do stworzenia choreografii do wybranej muzyki.
Spacer lub wycieczka	– rozwijanie zdolności dostrzegania elementów otoczenia (zdobień, symboli, znaków), w których występują proste, ukośne, krzywe, faliste, spiralne, śrubowe motywy – rozwijanie zdolności patrzenia na świat „matematycznymi oczami”	– aparat fotograficzny, blok rysunkowy, ołówek	– poszukiwanie w otoczeniu schematów linii prostych, krzywych, łamanych, np. linia ciągła, podwójna ciągła, odcinki – linie przerywane, łamane – oznaczenia miejsca przystanku autobusowego i dokumentowanie spostrzeżeń	– Co to znaczy iść prosto? – Pokażcie, jak można iść prosto z danego punktu. Nauczyciel chwali poszukiwania i poczynania dzieci.

Linia prosta, krzywa, cd.

				Nauczyciel proponuje rozmowę po zakończonym spacerze oraz po powrocie rozmowę przy obrazku. – Jak myślicie, co oznaczają określone linie? – Zachęcam was do narysowania planu ulicy, przy której mieszkacie.
Detektywi – na tropie linii	– czynienie spostrzeżeń – liczenie	– obrazki przedstawiające tęczę, przewody elektryczne, cyfrę 8, ołówek, drabinę, płotek, pasy, litera Z, błyskawicę, zeszyt łuk, sznurek itp.	– poszukiwanie kształtów prostych, ukośnych, krzywych, falistych, spiralnych	– Jakie linie ukryły się na obrazkach (tęcza, przewody elektryczne, cyfra 8, ołówek, drabina, płotek, pasy, litera Z, błyskawica, zeszyt łuk, sznurek itp.) – Których linii było najwięcej?
Zabawy z piłką	– posługiwanie się piłką w zakresie rzutu, chwytania, kozłowania, odbijania, prowadzenia jej po prostej, łamanej, krzywej, spiralnie	– piłki	– rzucanie i toczenie piłek Uczestnicy zabawy siedzą w szeregach naprzeciwko siebie. Przetaczają piłkę rękami, pomiędzy stopami, rzucają po linii prostej i łamanej wzajemnie do siebie. W kolejnym ćwiczeniu leżą przodem.	– Usiądźcie w dwóch szeregach, będziecie rzucać piłką, toczyć ją po liniach prostych (do siebie, na wprost i kolegi obok itp.) i łamanych (do kolegi po przekątnej). Co zauważyłyście?
Ornamenty i parkiety	– rozwijanie umiejętności posługiwania się takimi środkami wyrazu plastycznego, jak: barwa, kształt, faktura w kompozycji na płaszczyźnie i w przestrzeni, stosując określone materiały, narzędzia i techniki plastyczne – naśladowanie dostrzeżonych regularności i kontynuowanie ich zgodnie z odkrytą regułą	– pędzel, farby, plastelina, kartoniki-kafelki, klej	– malowanie pędzlem, palcem, kredą czy węglem kształtów literopodobnych tworzonych z kresek pionowych, ukośnych, łuków, spiralnych – tworzenie parkietów, mozaik przy pomocy kartoników-kafelek[2] naklejanych na karton Przygotowanie materiałów: kafelki (w dużej ilości) powinny mieć kształt kwadratu i wielkość co najmniej 2,5x 2,5 cm  – zdobienie butelki/ramki na zdjęcia ornamentami z plasteliny – wałkowanie linii prostych, falistych, łamanych, spiralnych	– Wymyślcie swój szlaczek. – Co ciekawego zauważyłyście?

[1]A. Twardowska, W. Próchniewicz, *Wesołe instrumenty*, Wyd. Werset, Warszawa 2006; [2]E. Swoboda, *Regularności geometryczne w uczeniu się dzieci* [w:] E. Swoboda, J. Guncaga (red.), *Dziecko i matematyka*, s. 48.

Punkt

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Zabawy z latarką	– matematyzowanie stosunków przestrzennych – posługiwanie się określeniami: *wysoko, nisko, na ścianie, na suficie, na podłodze* itp. – analizowanie kształtów i badanie, jak zmieniają się przy przekształceniach	– latarki	– zgaszenie światła i opuszczenie rolet, wodzenie wzrokiem za światłem dwóch latarek – szukanie punktów przecięcia się strumienia światła – podejmowanie działań badawczych w parach, szukanie punktów przecięcia dwóch torów światła, dwóch dróg osób	– Poszukajcie punktu przecięcia dwóch strumieni światła latarki.
Zjawiska w otoczeniu	– budowanie pojęcia *punkt* przez działania percepcyjno-manipulacyjne	– zdjęcia czy obrazki zwierząt, ludzi lub zjawisk przyrodniczych	– oglądanie swojej osoby, kolegów i koleżanek, okazów czy obrazków zwierząt, przedmiotów czy zjawisk przyrodniczych (np. deszcz, grad), które mają punkty, kropki czy cętki – liczenie piegów, punktów, cętków – porównywanie liczebności	– Przyjrzyjcie się obrazkom lub sobie. – Spróbujcie odnaleźć różne punkty (piegi, znamiona, cętki, guziki). – Co możecie o nich powiedzieć? – Porównajcie je. – Policzcie je. Kto ile ma?
Tropienie punktów	– ćwiczenia sprawności manualnej	– konfetti, pokruszony styropian, koraliki, drobne kamyczki, monety, ziarna	– zbieranie rozrzuconych na dywanie różnych małych przedmiotów typu: konfetti, pokruszony styropian, koraliki, drobne kamyczki, monety, szukanie i zbieranie elementów – werbalizowanie spostrzeżeń i pomysłów	– Zbierzcie jak najwięcej różnych małych, okrągłych przedmiotów. – Zachęcam was do wykorzystania pęsety. – Opiszcie, jak wyglądają zebrane przedmioty. – Które przedmioty zbierało się najłatwiej, a które najtrudniej? Dlaczego? – Jak je wykorzystać?
	– stworzenie okazji do porównywania i badania drobnych okrągłych przedmiotów za pomocą lup i lornetki	– drobne okrągłe przedmioty, lupy, lornetki	– oglądanie drobnych przedmiotów przez lupę – opisywanie wyglądu, kształtu, koloru, wielkości itp.	– Nazwijcie zebrane przedmioty. – Jak można je uporządkować? Jakie macie propozycje? – Podzielcie je na grupy.

Punkt, cd.

Działania przy mapie	– szukanie na mapie Polski nazw miast i miejscowości – rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – mierzenie i zapisywanie wyników pomiaru odległości pomiędzy miejscami na mapie – porównywanie wyników pomiaru	– kontur mapy Polski indywidualny dla każdego dziecka	– podjęcie pracy, samodzielne lub z pomocą wykonanie jej – prezentowanie spostrzeżeń i efektów swojej pracy – oglądanie tych samych miejsc na różnych mapach	– W domu odrysuj kontur mapy Polski, wytnij go. Poproś rodzica, aby na mapie Polski zaznaczył z tobą miejscowości, w których mieszka twoja rodzina, gdzie ty mieszkasz lub gdzie bywasz na wakacjach. Wszystkie te punkt zaznacz kolorowymi pineskami. – Za pomocą sznurka zbadaj odległości. – Porównajcie na różnych mapach obszar tej samej miejscowości.
Wybieranie instrumentów	– rozwijanie percepcji słuchowej poprzez wygrywanie rytmu lub zaznaczanie akcentu	– nagrania muzyki z różnymi rytmami, instrumenty muzyczne: kołatka, trójkąt, bębenek, marakasy itp. schematy rytmiczne, np. .. . . . ; ... .. .; .. .. ..;	– słuchanie różnych rytmów – odkodowywanie zapisu i wygrywanie różnych rytmów typu: .. . . . ; ... .. .; .. .. ..; na instrumentach	– Posłuchajcie tych rytmów. Jak możemy je zapisać za pomocą kropek? – Wybierzcie instrumenty potrzebne do wygrania rytmów i akcentów. – Wykorzystując wybrane instrumenty, zagrajmy rytm lub akcenty do różnych fragmentów muzyki.
Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– stworzenie okazji do schematyzowania, matematyzacja stosunków przestrzennych	– duże arkusze papieru, pędzle i farby	– rozpryskiwanie farby (lub pasty do zębów) z pędzla (szczoteczki do zębów) w celu stworzenia punktów – łączenie kropek po wyschnięciu punktów – opowiadanie o przebiegu swojej pracy i jej efektach	– Spróbujcie rozpryskać farbę na kartce. – W jaki jeszcze sposób można utworzyć kropki, cętki i plamy na arkuszu papieru? – Połączcie kropki. Co powstało?
	– różnicowanie i klasyfikowanie materiałów – rozwijanie kreatywności dzieci przez twórcze działania percepcyjno-manipulacyjne	– sypkie materiały spożywcze, np. groch, mak, pestki, nasiona, kasze różnego rodzaju	– postrzeganie podobieństw i różnic pomiędzy materiałami – tworzenie kompozycji plastycznych	– Przyjrzyjcie się i nazwijcie te materiały. – Stwórzcie z nich różne kompozycje i obrazki.
	– budowanie w umysłach dzieci matematycznego schematu punktu	– szablony z wyciętymi dziurkami i sznurek	– przewlekanie sznurka przez zaznaczone punkty, próby wyszywania	– Proponuję wam przewlekanie sznurka przez dziurki i stworzenie ciekawego obrazka.

Gry towarzyskie	– kształtowanie w umysłach dzieci rozumienia pojęcia *punkt*	– gry planszowe, np. scrabble, kent	– granie i podejmowanie prób grania w wybraną grę z kostką, zbieranie i liczenie punktów	– Jakie jeszcze znacie gry, w których liczy się punkty?
Zabawy w szyfrowanie	– rozwijanie zdolności rozumienia symbolu – badanie różnego rodzaju druku, którego podstawą są kropki, kreski czy obrazki – zachęcenie do kodowania informacji za pomocą alfabetu Morse'a, pisma Braille'a czy wymyślenia swojego kodu, lub hieroglifów	– druk pismem Braille'a, przykład informacji zaszyfrowanej alfabetem Morse'a	– oglądanie sekwencji kropek tworzących informację – dzielenie się wiedzą i formułowanie przypuszczeń na temat papieru i technik kodowania informacji – szyfrowanie informacji za pomocą różnych kodów	– Jak myślicie, jakie zadanie ma latarnia morska? – Jakie znacie metody szyfrowania? – Czy ktoś z was wie, co to jest (pokaz druku Braille'a, kodu na lekarstwach, kodu kreskowego, zapisu informacji w alfabecie Morse'a, hieroglifów itp.).

Kula

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania kulistych i okrągłych kształtów – oglądanie, określanie cech, opisywanie, porównywanie okrągłych przedmiotów	przedmioty, rzeczy, owoce, warzywa w kształcie kuli: piłki gumowe, drewniane kule, pomarańcza, koraliki, bombki choinkowe itp.	– rozpoznawanie przedmiotów za pomocą zmysłów – określanie ich cech, podobieństw i różnic – szukanie przedmiotów w kształcie koła i kuli	– Za pomocą zmysłu dotyku, węchu słuchu zbadajcie te przedmioty i powiedzcie, jakie one są? – Znajdźcie przedmioty okrągłe i płaskie, kuliste i niepłaskie itp. – Jak myślicie, w czym są podobne, a czym się różnią, np. piłka i nakrętka słoika?
	– porównywanie piłek pod względem wielkości, materiału, z którego są wykonane – badanie właściwości okrągłych przedmiotów – klasyfikowanie przedmiotów ze względu na różne właściwości	– różne piłki: do tenisa stołowego, ziemnego, ręczna, do gry w piłkę nożną, palantową, piłeczki kauczukowe, pingpongowe itp.	– badanie piłek: dotykanie, podrzucanie, kopanie, turlanie – wypowiadanie się na temat poczynionych spostrzeżeń i doświadczeń	– Jakie czynności można wykonywać przy użyciu piłki? – Do jakich sportów służą te piłki? – Które piłki wykorzystywane są w sportach, gdzie aktywne są tylko ręce, tylko nogi, ręce i nogi?
	– stworzenie okazji do posługiwania się określeniami: pół, połowa, środek, średnica, odcinek	– pomarańcza, pomidor lub inne okrągłe warzywa czy owoce, nożyki, deseczki itp.	– przecinanie pomarańczy – posługiwanie się językiem matematyki	– Przetnijcie pomarańczę na pół. – Jaki kształt rozpoznajecie po przecięciu pomarańczy? – Gdzie jest środek?
Kula jako bryła obrotowa	– rozwijanie umiejętności rozumienia zjawiska obrotu wokół własnej osi – budowanie pojęcia *kula* i rozumienia właściwości bryły obrotowej	– patyczek, klej, połowa płaskiego koła z papieru	– przyklejanie do patyczka połowy koła, obracanie wokół osi	– Przyklejcie połowę koła na patyk i obracajcie nim w celu zaobserwowania właściwości, że kula jest bryłą obrotową. W celu ulepszenia pokazu półkole na patyku można umieścić w plastikowej formie w kształcie bańki – dostępne w pasmanteriach, koła należy dopasować do odpowiedniej wielkości plastikowych kul.

	– rozwijanie intuicji geometrycznej	– bańki mydlane	– puszczanie baniek mydlanych – określanie ich wielkości i kształtu	– Po stworzeniu bańki mydlanej rozbijcie ją na kartce papieru i odrysujcie kształt, który pozostał po kuli.
	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia *kula* – rozwijanie myślenia matematycznego	– balony	– dmuchanie balonów do kształtu kuli – odbijanie balonów – turlanie – transformowanie kształtu	– Spróbujcie zmieniać kształt nadmuchanego balonu w kształcie kuli (np. przez uciśnięcie lub wypuszczenie powietrza, przekręcenie). Czy zmienił się kształt?
Zabawy ruchowe: podawanie piłki w różny sposób	– doskonalenie motoryki małej – gromadzenie doświadczeń zmysłowych przez kontakt z kulistym przedmiotem	– piłka	– podawanie do siebie piłki w różny sposób	– Siedząc w kole, podawajcie sobie piłkę z rąk do rąk tak jak na przykład rzuca się gorący ziemniak, szklaną kulę, kruche jajko, jabłko, arbuza itp.
Wyścigi piłek	– rozwijanie sprawności motorycznej przez posługiwanie się piłką: rzucanie, chwytanie, kozłowanie, odbijanie	– piłki	– branie udziału w grach zespołowych, polegających na przenoszeniu na łyżce obiektu o kulistym kształcie (piłeczka pingpongowa, tenisowa itp.), wyścigach w toczeniu, odbijaniu, kozłowaniu piłki	– Co było najłatwiejsze: przenoszenie piłki na łyżce, odbijanie, rzucanie? Dlaczego?
Zabawy muzyczne	– stworzenie okazji do improwizowania na instrumentach – granie na instrumentach prostych rytmów i wzorów rytmicznych – opisywanie wyglądu instrumentu	– instrumenty muzyczne o kształcie kuli, np. marakasy, grzechotki	– słuchanie dźwięków wydawanych przez kuliste instrumenty muzyczne – granie na instrumentach	– Odtwórzcie podany przeze mnie rytm. – Wykorzystując wybrane instrumenty, stwórzcie własny rytm lub muzykę.
Model układu słonecznego – działania plastyczno-konstrukcyjne	– rozwijanie zainteresowań dzieci – budowanie w umysłach dzieci pojęcia kuli w toku prac techniczno-konstrukcyjnych – rozwijanie chęci podejmowania działań technicznych w toku pracy indywidualnej i zespołowej	– globus, model układu słonecznego, papier, kule, klej, pędzle i farby	– oglądanie modelu kuli ziemskiej – wskazywanie półkul i innych elementów – budowanie modelu kosmosu – oklejanie papierem kul różnej wielkości reprezentujących planety – malowanie ich i wieszanie z pomocą dorosłych na suficie – tworzenie małego modelu układu słonecznego z kulek i patyczków	– Przyjrzyjcie się temu globusowi i modelowi układu słonecznego. – Co widzicie na tym modelu? – Jakie znacie planety, co o nich wiecie? – Zachęcam was do stworzenia grupowego i własnego modelu układu słonecznego.

Kula, cd.

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia *kula* przez działania percepcyjno-manipulacyjne – tworzenie form konstrukcyjnych z różnych materiałów	– plastelina, papier, glina, masa solna, ciastolina itp.	– lepienie kształtu kuli z różnych materiałów	– Która z kul jest najlżejsza, a która najcięższa? – Która się najlepiej turla, a która najdalej?
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *kula*	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z kulą: kula u nogi, kula ziemska, pchnięcie kulą, trafić jak kulą w płot, zabłąkana kula, kula bilardowa, półkula mózgowa	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? – Co znaczą?
Smak i kształty pokrojonych owoców i warzyw	– stworzenie okazji do posługiwania się pojęciami: *wzdłuż*, *w poprzek*, *ukośnie połowa*, *ćwiartka*, *ósemka*, *część*, *całość* w toku działań praktycznych – wielozmysłowe badanie smaku i określanie kształtów owoców, np. okrągły – rozwijanie wrażliwości sensorycznej – rozwijanie umiejętności utrzymywania porządku w swoim otoczeniu – wprowadzenie do ułamków	– owoce i warzywa o kulistym kształcie, np. jabłko, dynia, kapusta, pomidor	– podejmowanie oraz kontynuowanie pracy – krojenie – smakowanie – wypowiadanie się – posługiwanie się językiem matematyki	– Zapamiętajcie smaki i kształty. – Podzielcie owoce na dwie, cztery, osiem części.

Sześcian

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania: oglądania, badania, mierzenia	– różne sześcienne klocki i kostki, np. Rubika, do gier planszowych, pudełko w kształcie sześcianu	– dotykanie przedmiotów – porównywanie – nanoszenie za pomocą określeń słownych cech, z czego jest wykonane, czy jest duże czy małe, jakie jest w dotyku, do czego służy, czy ma brzegi, ściany, krawędzie, podstawę itp. – określanie podobieństw – oglądanie, składanie i rozkładanie sześciennego papierowego pudełka – szukanie przedmiotów o sześciennym kształcie	– W czym są do siebie podobne te pudełka, czym się różnią? – Czy ktoś wie, gdzie jest bok tej kostki, ile jest boków? – Gdzie są wierzchołki? – Dlaczego ta figura nazywa się *sześcian*? – Ile klocków udało wam się zebrać, czy wszystkie są takie same?
Zabawy ruchowe – Kolorowy klocek: „Kolorowy klocek mamy, za plecami go chowamy. Klocek krąży tu i tam, gdzie jest klocek pokaż nam".	– określanie położenia przedmiotu (klocka) w przestrzeni – rozwijanie koordynacji sensoryczno-motorycznej	– drewniany klocek lub sześcienna kostka	– Podawanie sobie klocka z rąk do rąk za plecami. Jeden uczestnik jest w środku, pozostali siedzą w kole. Uczestnicy podają sobie klocek za plecami w jak najmniej widoczny sposób, mówiąc w tym czasie wierszyk. Osoba ze środka odgaduje, gdzie jest klocek, gdy skończy się rymowanka: *Kolorowy (drewniany) klocek...*	– Wskaż, gdzie jest klocek? Opisz jego położenie. – Pobawcie się teraz dwoma klockami, trzema itp.

Sześcian, cd.

Zabawa integracyjna – Dom buduję	– ćwiczenia analizy słuchowej – porównywanie liczebności zbiorów – wznoszenie konstrukcji z klocków	– drewniane klocki	– Jedno z dzieci wchodzi do środka i mówi: *Dom buduję, dom buduję cegiełki Kasi potrzebuję.* Wybrane dziecko mówi swoje imię. Dzieli je na sylaby, wybiera odpowiednią liczbę klocków sześciennych i ustawia je na środku. Po zebraniu klocków następuje wspólna budowa domu.	– Które z dzieci ma imię o największej liczbie cegiełek, a które o najmniejszej? – Jakie imiona mają tyle samo sylab? – Jak możemy zmienić formę mienia Ola, by było jak najwięcej sylab.
Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– rozwijanie umiejętności wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu, takich jak kształt i barwa, w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych	– klocki, pudełka, papier, wykałaczki, klocki *Magnetic*	– konstruowanie z papieru, wykałaczek, klocków *Magnetic* modelu sześcianu – budowanie z klocków sześciennych wież, bram itp. – oklejanie sześciennych pudełek – zdobienie ornamentami i szlaczkami	– Spróbujcie zbudować wieżę z klocków sześciennych z zamkniętymi oczami. – Porównajcie swoje wytwory. – Zaprezentujcie swoje pudełka.
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *sześć, sześcian*	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z powiedzeniami, w których pojawia się słowo *sześć* (metr sześcienny, sześciopak, sześciolatek, sześciobój)	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie – budowanie znaczeń	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? – Co znaczą?
Smaki i kształty	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania kształtów – rozwijanie umiejętności dostrzegania, kontynuowania i tworzenia regularności rytmicznych według własnego pomysłu	– warzywa, owoce, deseczki, nóż	– krojenie warzyw lub owoców w sześcienne kostki, robienie koreczków, szaszłyków	– Zróbcie owocowe lub warzywne szaszłyki, w których będzie widoczny rytm. – Zapamiętajcie wrażenia zmysłowe.

Walec

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania różnych przedmiotów w kształcie walca	– wałek do ciasta, wałki fryzjerskie, malarskie, puszki w kształcie walca, pojemniki spożywcze itp.	– określanie podobieństw i różnic, opisywanie, z czego przedmioty są wykonane, czy toczą się łatwo, czy trudniej, od czego to zależy	– Z czego wykonane są te przedmioty? – Co mają ze sobą wspólnego te przedmioty, czym się różnią?
Walec jako bryła obrotowa	– rozwijanie umiejętności rozumienia zjawiska obrotu wokół własnej osi – budowanie pojęcia *walec* i rozumienia właściwości bryły obrotowej	– patyczek, klej, kształt czworokąta wycięty z papieru	– przyklejanie do patyczka kształtu czworokąta wzdłuż jednego z jego boków, obracanie wokół osi	– Przyklejcie czworokąt wzdłuż jednego brzegu do patyczka i obracajcie nim w celu zaobserwowania właściwości, że walec jest bryłą obrotową.
Zabawy ruchowe	– budowanie w umysłach dzieci pojęcia *walec* – badanie ruchu toczenia się, obserwacje toru i szybkości toczenia się walcowatych przedmiotów wykonanych z różnych materiałów	– wałek do ciasta, wałki fryzjerskie, malarskie, puszki w kształcie walca, pojemniki spożywcze itp.	– toczenie różnych przedmiotów w kształcie walca	– Czy wszystkie przedmioty toczą się tak samo? – Które najłatwiej, najtrudniej, najszybciej, najwolniej itp.?
Zabawy muzyczne	– stworzenie okazji do słuchania walców i walczyków – próby formułowania wypowiedzi na ich temat	– nagrania utworów muzycznych: walców i walczyków	– słuchanie nagrań – wypowiadanie się na temat podobieństw i różnic – określanie nastroju – mówienie o swoich upodobaniach	– Czym się różnią te utwory? Jakie są? – Jaki jest nastrój tych utworów?
	– stworzenie okazji do improwizowania na instrumentach – granie na instrumentach prostych rytmów i wzorów rytmicznych – opisywanie wyglądu instrumentu	– instrumenty perkusyjne rzeczywiste lub na obrazkach, np. drewienka – klawesyn, wielki bęben, mały bęben (werbel), kocioł, tamburyn, bębenek[1]	– przyglądanie się, opisywanie instrumentu – rozpoznawanie kształtu walca – określanie części instrumentu – wysłuchiwanie i wygrywanie rytmów	– Odtwórzcie podany przeze mnie rytm. – Wykorzystując wybrane instrumenty, stwórzcie własny rytm lub muzykę.

Walec, cd.

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– stworzenie dzieciom okazji do wałkowania – rozwijanie umiejętności dostrzegania i analizowania wzorów dekoracyjnych – twórcze działania percepcyjno-manipulacyjne i psychomotoryczne	– wałki malarskie z różnymi wzorami, duże arkusze papieru, różnej wielkości prostokątne kształty wycięte z papieru różnej grubości i o różnej fakturze, masa solna, drucik	– podejmowanie działań twórczych, takich jak: wałkowanie, analizowanie wzoru – wycinanie wzoru – tworzenie wałka – rozkładanie modelu walca i odrysowywanie go – tworzenie modeli – zwijanie w rulon prostokątnych kartonów i kartoników, sklejanie brzegów, tak aby powstała „lornetka", – wypełnianie rulonu masą solną, wstawianie druta, który stanowi uchwyt, rycie w wałku wzoru	– Odbijcie ten wzór na dużych arkuszach szarego papieru. Przyjrzyjcie się im. Który się wam podoba? – Z jakiego papieru wałki toczą się najszybciej, a z jakiego z trudnością? Jak myślicie – dlaczego? – Jak możecie ozdobić wasze wałki? – Zaprojektujcie wzór, który mógłby być na waszym wałku malarskim.
Smaki i kształty	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania kształtów – określanie kształtu owoców i warzyw – krojenie wzdłuż, w poprzek, na plasterki	– marchewka, rzodkiewka, ogórek	– określenia kształtu, krojenie, smakowanie	– Zapamiętajcie smaki i kształty. – Jaki to smak?
Pieczenie ciasteczek	– stworzenie okazji do podejmowania pracy zespołowej – doświadczanie wałkowania, wycinania – dekorowanie	– produkty potrzebne do przygotowania kruchych ciasteczek (mąka, jajka, śmietana, masło, proszek do pieczenia, dżem)	– wałkowanie ciasta, wycinanie, ozdabianie, pieczenie , smakowanie	– Na czym polegała wasza praca? Do czego używa się wałka w kuchni?
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *walec*	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z walcem, np. walec drogowy, wałek do ciasta, walc, walcować – w hucie, tańczyć, ciasto, walce zbożowe	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków, – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają te obrazki? – Co znaczą?

Sianie i walcowanie	– wdrażanie do podejmowania pracy zespołowej, zgodnego działania, utrzymywania porządku w toku pracy i sprzątania po pracy – rozwijanie rozumienia pojęcia *walcowanie*	– nasiona trawy, narzędzia ogrodnicze, woda, konewka	– praca użyteczna: sianie trawy – kopanie, grabienie, sianie, walcowanie, podlewanie	– Opowiedzcie o swojej pracy.
Zabawa tematyczna U fryzjera, Roboty drogowe	– rozwijanie intuicji geometrycznej w toku zabaw tematycznych	– akcesoria potrzebne do zabawy tematycznej *U fryzjera:* grzebień, wałki, lustro itp. – akcesoria potrzebne do zabawy tematycznej *Roboty drogowe*: samochody, walec itp.	– bawienie się – komunikowanie się w zabawie – przyjmowanie roli	– W jakiego rodzaju pracy używane są jeszcze inne walce i wałki? – W co można się jeszcze bawić?

[1]A. Twardowska, W. Próchniewicz, *Wesołe instrumenty*, Wyd. Werset, Warszawa 2006.

Prostopadłościan

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– wielozmysłowe badanie przedmiotów w kształcie prostopadłościanu i sześcianu	– różne pudełka w kształcie prostopadłościanów i sześcianów	– oglądanie, klasyfikowanie pudełek na sześcienne i w kształcie prostopadłościanu lub względem innej cechy jakościowej, np. wysokości ścian – odnajdywanie ścian w kształcie prostokąta, kwadratu	– Przyjrzyjcie się tym pudełkom. – Jakie mają ścianki? – Gdzie jest wierzchołek? – Co mają wspólnego ze sobą te wszystkie figury? – Jakie figury płaskie rozpoznajecie?
	– mierzenie długości, szerokości, wysokości różnych przedmiotów w kształcie prostopadłościanu – posługiwanie się jednostkami: milimetr, centymetr, metr	– przyrządy miernicze: linijka, ekierka, taśma miernicza, miarka krawiecka, sznurek, tasiemki	– mierzenie ścian brył, krawędzi – doświadczanie podobieństw i różnic – szukanie ścian prostopadłych i równoległych	– Zmierzcie ściany i krawędzie. – Zapiszcie wyniki pomiarów, porównajcie wyniki. – Wskażcie ściany prostopadłe i równoległe.
	– badanie prostopadłości	– ekierka, dwie kartki papieru czy tektury	– układanie różnych przedmiotów prostopadle względem siebie	– Za pomocą ekierki poszukajcie kątów prostych.
Dekorowanie	– tworzenie wzorów graficznych w układzie pasowym i gwieździstym, z obrotem lub bez obrotu, w układzie zbieżnym lub rozbieżnym	– pudełka, materiały plastyczne, flamastry, klej, papier kolorowy, pieczątki, elementy dekoracyjne itp. klocki w kształcie prostopadłościanów	– oklejanie pudełek, zdobienie ornamentami i szlaczkami, itp. – układanie z klocków rytmów, wzorów dekoracyjnych pasowych i na bazie koła czy w układzie krzyżowym	– Czy w waszych zdobieniach można dostrzec symetrię? – Dobierzcie się w pary. Układajcie ornamenty w parach.
Budowanie modelu[1]	– kształtowanie pojęcia prostopadłościanu – tworzenie pełnych i pustych modeli prostopadłościanu	– materiały plastyczne: plastelina, glina, modelina, ziemniak, nożyk, klocki magnetyczne, groch i wykałaczki itp.	– budowanie modelu prostopadłościanu z plasteliny, gliny, modeliny, wycinanie z ziemniaka – sklejanie z papierowej siatki modelu pustego – wyklejanie ścian pudełek papierem kratowanym – obliczanie objętości przez wkładanie warstwami klocków do pudełka – mierzenie klockami pola ścian bryły i objętości	– Czym różnią się te modele? – Ile klocków zmieści się w tym pudełku? – Ile klocków składa się na ściankę?

[1]Pomysły zaczerpnięte z publikacji H. Siwek *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa, 2005, s. 52–53.

Ostrosłup

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– wielozmysłowe badanie kształtów i form	– makiety ostrosłupów o różnych podstawach: trójkąta, kwadratu, prostokąta, pięciokąta, sześciokąta, trapezu itp.	– określanie cech jakościowych brył – wskazywanie ścian, podstawy, krawędzi, wierzchołka – zdobywanie wiedzy i formułowanie uogólnień typu: bryły mają ściany w kształcie trójkąta i każda ma wierzchołek, a różne podstawy	– Przyjrzyjcie się tym bryłom. – Jakie mają ścianki? Gdzie jest wierzchołek? – Co mają wspólnego ze sobą te wszystkie figury? – W czym są podobne, czym się różnią?
	– dobieranie odpowiednich siatek do odpowiednich modeli ostrosłupów	– siatki ostrosłupów	– działania percepcyjno-manipulacyjne – werbalizowanie	– Proponuję ubieranie ostrosłupa. Pokażę wam siatki, a waszym zadaniem będzie dopasowanie siatek do ostrosłupów (wśród siatek i brył znajdą się niepasujące do siebie). – Proponuję, byście odrysowywali podstawy brył, a wasi koledzy, by dopasowywali ich ślady. – Która siatka nie znalazła swojego ostrosłupa? Dlaczego?
Zabawy ruchowe	– stworzenie okazji do uczestniczenia w zajęciach rozwijających sprawność fizyczną – budowanie modelu ostrosłupa	– muzyka	– działania psychomotoryczne – łączenie się w kilkuosobowe zespoły – założenie na nogi gumy – tworzenie podstawy figury – zilustrowanie za pomocą rąk wierzchołka	– Stańcie w małych kółkach, gdy muzyka będzie grać, poruszajcie się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy ucichnie, połączcie wasze ręce, tworząc kształt ostrosłupa. Dostaniecie gumę, która wam pomoże zilustrować podstawę figury. – Przyjrzyjcie się, czy wasze figury są takie same. – Czym się różnią?

Ostrosłup, cd.

Zabawy ruchowe				– Dlaczego wasze figury się różnią? – Proponuje wam zabawę: ostrosłup zmienia podstawę, twórzcie różne ostrosłupy o różnej podstawie i policzcie, ile wam się uda stworzyć brył.
Lepienie figur	– twórcze transformacje kształtów i modeli	– plastelina	– lepienie różnych figur: kształtów sześcianów, ostrosłupów, trójkątów i zamienianie ich w inne kształty brył i figur płaskich	– Ulepcie z plasteliny jakąś figurę płaską lub przestrzenną. – Zamieńcie ją w inną.
Gwiazda morawska	– rozwijanie umiejętności wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu, takich jak kształt i barwa w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych	– kolorowy papier, klej	– twórcze działania psychomotoryczne, których efektem jest wytworzenie gwiazdy morawskiej, powstaje ona w wyniku doklejenia ostrosłupów do ścian wielościanu archimedesowego zwanego sześcio-ośmiościanem rombowym małym[1]	– Proponuję ozdobienie klasy gwiazdami morawskimi (w okresie Bożego Narodzenia). – Poszukajcie gwiazd morawskich w swojej miejscowości, w Internecie i innych źródłach.

[1]http://www.matematyka.wroc.pl/book/gwiazda-morawska, data dostępu: 30.06.2011.

Stożek

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania i oglądania przedmiotów w kształcie stożka	– przedmioty w kształcie stożka, np.: czapeczki urodzinowe, lejek, wafelek do lodów, model stożka	– dotykanie przedmiotów – porównywanie – określanie za pomocą określeń słownych cech danej rzeczy	– W czym są do siebie podobne te rzeczy, czym się różnią?
		– przyrządy miernicze, gazety, tablica, kreda	– mierzenie obwodów głów dzieci i tworzenie czapek z gazet w kształcie stożków	– Po zmierzeniu zapiszcie na tablicy wyniki pomiaru. – Spróbujcie odgadnąć, która czapka może pasować na którą głowę.
		– 10 matryc stożków o różnej średnicy bez podstawy, matrycę z narysowanymi 10 kołami, będącymi podstawami stożków	– porównywanie, badanie przez przyporządkowywanie	– Dopasujcie podstawy modeli do matryc zgodnie z wielkością figury.
Stożek – bryła obrotowa	– rozwijanie umiejętności rozumienia zjawiska obrotu wokół własnej osi – budowanie pojęcia *stożek* i rozumienia właściwości bryły obrotowej	– kształt trójkąta prostokątnego wycięty z kolorowego papieru, patyk, klej	– przyklejanie do patyczka kształtu trójkąta wzdłuż jednego z jego boków, obracanie wokół osi	– Przyklejcie trójkąt wzdłuż jednego brzegu do patyczka i obracajcie nim w celu zaobserwowania właściwości, że walec jest bryłą obrotową.
Zabawy ruchowe	– doskonalenie motoryki – reprodukowanie kształtu stożka przez działania percepcyjno-motorycznych	– muzyka	– dobieranie się w zespoły – swobodne poruszanie się w rytm muzyki – tworzenie koła – wyciąganie rąk w górę i tworzenie kształtu stożka	– Stańcie w małych kółkach, gdy muzyka będzie grać, poruszajcie się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy ucichnie, połączcie wasze ręce, tworząc kształt stożka. – Przyjrzyjcie się, czy wasze figury są takie same. Czym się różnią? – Dlaczego wasze figury się różnią?
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo *stożek*	– obrazki, przedmioty lub napisy związane ze słowem *stożek*: stożkowaty, stożek wzrostu	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie	– Co znaczy? Wyjaśnij swoimi słowami. – Kto z was myśli inaczej, kto ma inne doświadczenia? Podajcie przykłady użycia tych słów i wyrażeń.

Wycinek koła

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– tworzenie warunków do wielozmysłowego badania – oglądanie, określanie cech, opisywanie, porównywanie przedmiotów, – badanie właściwości przedmiotów i zjawisk – liczenie	– modele trójkąta i wycinka koła	– porównywanie figur geometrycznych: trójkątnych i w kształcie wycinka koła – określanie podobieństw i różnic	– Jakie są te kształty? Co możecie o nich powiedzieć? Czym się różnią? – Jaki kształt rozpoznajesz?
		– serki topione i pleśniowe (lub tylko etykiety i opakowania)	– działania percepcyjno-manipulacyjne: układanie z kostek serka homogenizowanego lub obrazków (w formie trójkątów) koła – liczenie wycinków tworzących koło	– Jakie rozpoznajecie kształty. Spróbujcie ułożyć z nich jakieś inne figury. – Policzcie, ile serków utworzy koło, a ile pół koła. – Ile serków mieści się w całym okrągłym opakowaniu? – Ile serków tworzy pół opakowania? – Ile potrzeba opakowań serów pleśniowych (typu Valbon), by utworzyć koło?
		– chusta animacyjna, kolorowe parasolki	– określanie kolorów materiału tworzących wycinki całości chusty animacyjnej, parasolki czy małych parasolek koktajlowych – obserwowanie zmiany kolorów podczas kręcenia parasolkami	– Przyjrzyjcie się, które wycinki mają kształt trójkąta, a które mają brzeg owalny. – Jakie barwy dostrzegacie podczas obracania parasolką? – Dlaczego tak się dzieje? – Od czego jest uzależnione widzenie wszystkich barw – kolorów parasolki?

Doświadczenie – Jakiego koloru jest światło?[1]	– działania badawcze i percepcyjno-manipulacyjne	– biały kartonik, krótki, bardzo dobrze zatemperowany ołówek, kątomierz, kolorowe flamastry, kredki albo farby, cyrkiel, nożyczki	Doświadczenie polegające na: – rysowaniu cyrklem na kartoniku okręgu o średnicy 10 cm – z pomocą kątomierza dzieleniu koła na siedem równych wycinków utworzonych przez kąty ok. 51° – kolorowaniu wycinków na siedem różnych kolorów: czerwony, pomarańczowy, żółty, zielony, niebieski, indygo, fioletowy – przebiciu przez środek koła ołówka z ostrzem skierowanym w dół tak, aby kolory znalazły się na górze – wprawianiu kolorowego koła w ruch wirujący, jakby to był bąk	– Co widzicie, wprawiając koła w ruch? – Dlaczego tak się dzieje?
Smak i kształty pokrojonych owoców i wafli	– rozwijanie zdolności posługiwania się językiem matematyki: pojęciami: *wzdłuż*, *w poprzek*, *ukośnie* – wielozmysłowe badanie smaku owoców, wafli i określanie ich kształtów – rozwijanie wrażliwości sensorycznej – rozwijanie umiejętności utrzymywania porządku w swoim otoczeniu	– wafle, nutella, pomarańcza, deseczki, nożyki	– krojenie okrągłych wafli na różnej wielkości wycinki, smarowanie nutellą, smakowanie, ćwiczenia języka i warg – cięcie pomarańczy na plasterki, a następnie na wycinki, degustacja	– Jak można nazwać tę część?

[1]http://debinka.pl/downloads/swiatlem_malowane.pdf, data dostępu: 26.06.2011

Wielokąty

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– stworzenie warunków do wielozmysłowego badania: oglądania, badania, mierzenia	– materiał ze starego parasola	– oglądanie materiału (po wyjęciu drutów parasola) – sprawdzanie, czy wszystkie trójkątne kawałki materiału są takie same – liczenie części	– Jakie kształty rozpoznajecie w tym parasolu? – Policzcie trójkątne części, które tworzą całość. – Czy ktoś wie, jak nazywa się figura o takim kształcie?
	– oglądanie, określanie cech, opisywanie przedmiotów – posługiwanie się określeniami: *okrągły*, *gładki*, *miły*, *szorstki* itp. – porównywanie przedmiotów – rozpoznawanie i liczenie znanych kształtów	– różne przedmioty w kształcie wielokątów, np. ośmiokątne foremki do ciasta, śruba sześciokątna, nakrętki	– wielozmysłowe badanie (wzrokowo, dotykowo, węchowo itp.) przedmiotów w kształcie wielokąta – opisywanie wyglądu	– Które przedmioty są do siebie podobne, a które zupełnie inne? – Jakie kształty rozpoznajecie? – Policzcie, ile ich jest.
	– budowanie modelu wielokąta z trójkątnych kształtów	– różnego rodzaju papierowe modele trójkątów (równobocznych, równoramiennych i inne)	– tworzenie wielokątów (pięciokąt, sześciokąt foremny, ośmiokąt itp.) w działaniach percepcyjno-manipulacyjnych	– Zbudujcie model sześciokąta, wykorzystując te kształty. – Czy można utworzyć model wielokąta z pięciu kwadratów i trójkątów?
	– rozwijanie zdolności odszukiwania par takich samych kształtów – mierzenie i porównywanie długości boków, posługiwanie się pojęciami: o 1 więcej, o 1 mniej itp. – układanie form wg wzrastającej lub malejącej liczby boków: od modeli trójkątów do ośmiokątów czy n-kątów	– modele różnego rodzaju wielokątów, wśród których występują po dwa parami takie same	– losowanie figury i szukanie z zamkniętymi oczami figury o takim samym kształcie – liczenie boków, kątów, mierzenie długości przy pomocy sznurka – porównywanie figur, liczby ich boków – układanie wielokątów według wzrastającej liczby kątów	– Z zamkniętymi oczami znajdźcie modele o takiej samej liczbie boków. – Policzcie boki, kąty. – Który z modeli jest złożony z największej liczby figur płaskich? – Uporządkujcie je według liczby boków.

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– budowanie pojęcia *wielokąt* przez działania percepcyjno-manipulacyjne – rozwijanie umiejętności wypowiadania się w różnych technikach plastycznych i przy użyciu elementarnych środków wyrazu, takich jak kształt i barwa w postaci prostych kompozycji i form konstrukcyjnych – rozwijanie umiejętności odczytywania sensu informacji podanych w formie uproszczonych rysunków i symboli – rozpoznawanie i nazywanie kształtu wielokąta	– modele wielokątów, np. na czarnym brystolu, kasza, klej, farba – układanki, mozaiki drewniane lub papierowe makiety	– smarowanie klejem i wysypywanie kaszą konturu wielokąta – odrysowywanie i wypełnianie farbą konturów wielokątów (pięcio-, sześcio- i ośmiokąta); – składanie wielokątów z układanki – tworzenie z elementów układanki wielokątów (pięciokąt, sześciokąt, ośmiokąt) modeli luster – liczenie, z ilu i jakich figur składa się utworzony ośmiokąt – układanie mozaik, witraży, plastrów miodu z wielokątów (np. sześciokątów foremnych)	– Posmarujcie klejem środek modelu i wypełnijcie go kaszą. – Ułóżcie mozaiki i porównajcie kształty i kompozycje.
Zabawy ruchowe	– stworzenie okazji do układania z trójkątnych kształtów modelu wielokąta i badanie odbić w lustrze kształtów trójkątów oraz wzorów z nich utworzonych	– modele trójkątów równobocznych, lusterka	– składanie kształtów – odbijanie w lustrze figur i wzorów	– Zachęcam was do pracy w grupach oraz łączenia kompozycji.
	– budowanie pojęcia wielokąt przez działania psychomotoryczne	– sznurek lub lina	– udział w zabawie integracyjnej: istotą zabawy integracyjnej jest rozłożenie na podłodze sznurka lub liny (lina tworzy kształt wielokąta), podnoszenie jej przez uczestników z równoczesnym uśmiechnięciem się, gdy lina jest ciężka od uśmiechów, uczestnicy kładą ją na podłodze	– Zaproponowanie, by każde dziecko uśmiechnęło się, a prowadzący zbierze uśmiechy przez zaciśnięcie liny. – Jak myślicie, jak można zmienić naszą linę w inną figurę?
Ćwiczenia słownikowe	– rozwijanie umiejętności kodowania i dekodowania informacji – zapoznanie z wyrażeniami i zwrotami, w których pojawia się słowo związane z nazwą wielokąt (pięciobój, sześciopak, wielokrotny)	– obrazki, przedmioty lub napisy związane z powiedzeniami, w których pojawia się wyraz *wielokąt*	– odczytywanie napisów – oglądanie obrazków – opisywanie ich – porównywanie, dopasowywanie obrazków – wyjaśnianie – budowanie znaczeń	– Przeczytajcie napisy i przyjrzyjcie się obrazkom. – Co przedstawiają obrazki? – Co znaczą? – Wyjaśnij swoimi słowami. – Które obrazki i napisy do siebie pasują. – Podajcie własne przykłady.

Wielokąty, cd.

Wielokąty w sztuce użytkowej, architekturze, malarstwie, rzeźbie	– rozbudzanie ciekawości poznawczej i zainteresowań matematycznych przez dostrzeganie kształtów – rozwijanie zainteresowań malarstwem, rzeźbą, architekturą	– reprodukcje, fotografie ilustrujące dzieła sztuki i architektury, gdzie występują motywy oparte na wielokątach (np. islamskie ornamenty, mozaiki w Wenecji i Rawennie, ornamenty w architekturze Gdańska czy Krakowa[1], malarstwo kubistyczne, geometryczne elementy charakterystyczne dla regionu)	– oglądanie – prowadzenie rozmów – dzielenie się spostrzeżeniami i doświadczeniami	– Przyjrzyjcie się, jaki kształty rozpoznajecie?
Spacer – W poszukiwaniu wielokątów	– rozwijanie umiejętności patrzenia na świat matematycznymi oczami: poszukiwanie w otoczeniu przedmiotów w kształcie wielokąta (znaki drogowe, kostka brukowa itp.) w przyrodzie (np. płatki kwiatów), architekturze, sztuce zdobniczej, sztuce użytkowej (ornamenty), malarstwie, infrastrukturze (np. wzory z kostek brukowych)		– odnajdywanie w okolicy przedmiotów w kształcie wielokąta, zarówno w architekturze, budynkach, urządzeniach, jak i w przyrodzie itp. – robienie zdjęć lub szkiców	– Udamy się na spacer. Waszym zadaniem będzie odnalezienie w okolicy przedmiotów w kształcie wielokąta, zarówno w architekturze, budynkach, urządzeniach, jak i w przyrodzie itp. – Kiedy je odnajdziecie, zróbcie zdjęcie lub narysujcie je. – W domu będziecie mogli narysować plan spaceru.

[1]http://www.matematyka.wroc.pl/matematyka-wokol-nas/w-sztuce, data dostępu: 02.07.2011

Elipsa

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Co powstało z modelu stożka?	– eksperymentowanie i obserwowanie	– ulepiony z plasteliny model stożka, plastikowy nożyk, płaska plastikowa płytka	– przecinanie stożka ulepionego z plasteliny płaską płytką czy plastikowym nożykiem i otrzymanie kształtu elipsy – lepienie elipsoidy (kształtu jaja) i przecinanie go podobnie jak stożka	– Co zauważyłyście? – Co wam przypomina ten kształt?
	– stworzenie okazji do posługiwania się określeniami: brzeg, gładki, szorstki, okrągły, owalny, miły w dotyku, nieprzyjemny, taki sam, inny	– kształty kół i elips wycięte z materiałów o zróżnicowanej fakturze: papier, tektura, delikatny papier ścierny, folia, materiał gładki, szorstki, drewno, plastik; figury powinny być wycięte z tych samych materiałów w ilości po dwie, np. 2 tekturowe koła i 2 tekturowe elipsy	– badanie kształtów – opisywanie wrażeń – szukanie par figur	– Zamknijcie oczy i zapamiętajcie wrażenia dotykowe. – Znajdźcie pary takich samych kształtów i wykonane z tych samych materiałów. – Opowiedzcie o nich.
	– obserwowanie zmian – rozwijanie myślenia matematycznego	– hula-hoop	– obserwowanie działań nauczyciela: pokaz zmiany hula-hoop z okrągłego na eliptyczny przez ściśnięcie – werbalizowanie spostrzeżeń – wykonywanie czynności manipulacyjnych	– Jaki kształt ma ten przedmiot? – Czy teraz ma taki sam kształt? – Jak myślicie, dlaczego tak się stało? – Zaprezentujcie to na swoich kółkach.
	– badanie właściwości przedmiotów i kształtów – posługiwanie się pojęciem *okrągły*, *eliptyczny*	– przygotowanie okrągłych przedmiotów, lampka, zasłony lub żaluzje w celu zaciemnienia otoczenia	– udział w zabawie badawczej – tworzenie cieni różnych okrągłych przedmiotów – werbalizowanie spostrzeżeń	– Zachęcam was do zabawy polegającej na tworzeniu cieni okrągłych przedmiotów. – Co pokazują te cienie? – Czy okrągły przedmiot ma okrągły cień? Jak myślisz dlaczego?

Elipsa, cd.

Kreślenie kształtu elipsy	– projektowanie modelu elipsy	– dwie pineski, kawałek sznurka i rysika (ołówka, długopisu)	– kreślenie elipsy według zasad procedury: wetknąć szpilki w dwa punkty papieru, które staną się ogniskami elipsy, następnie zawiązać sznurek w luźną pętlę wokół szpilek, po czym naciągnąć sznurek za pomocą rysika tak, by powstał trójkąt; elipsę kreśli się, przesuwając ołówek po powierzchni kartki przy zachowaniu napięcia sznurka	– Jaki jest narysowany kształt?
Smaki i kształty	– krojenie pod różnymi kątami owoców i warzyw o eliptycznym kształcie i smakowanie ich	– kiwi, ugotowane jajko, banan itp.	– podejmowanie i kontynuowanie pracy, – krojenie – smakowanie – wypowiadanie się – wchodzenie w interakcje z kolegami i nauczycielem	– Jak można pięknie ułożyć pokrojone owoce na talerzu? Zaprezentujcie.
Zabawy ruchowe	– rozwijanie ekspresji ruchowej – rozwijanie umiejętności reagowania na sygnały przez wykonywanie poleceń – odwzorowywanie kształtu elipsy w zabawach ruchowych	– muzyka do tańca	– swobodny taniec do muzyki – podejmowanie zadań stawianych przez nauczyciela: dobieranie się w pary, układanie rąk w eliptyczny (owalny kształt) – dobieranie się w grupy, tworzenie koła, zmiana kształtu na eliptyczny	– Jak zmienić kształt rąk z okrągłego na eliptyczny?
Baloniku mój malutki, rośnij duży, okrąglutki. Balon rośnie że aż strach, przerwał miarę, no i bach.	– ćwiczenie koordynacji wzrokowo-ruchowej – tworzenie kształtu elipsy w toku zabawy ruchowej	– balony	– odbijanie balonu w grupie i w parach – tworzenie kręgu w kształcie elipsy, na hasło „balon pęka” – siad z impetem na podłogę	

Coś z niczego – plastyczno-konstrukcyjne działania twórcze	– rozwijanie twórczości plastycznej poprzez działania psychomotoryczne inspirowane kontaktem z eliptycznym kształtem	– ziemniaki, nożyki, kartki papieru, podstawki, farby, nasiona, sznurek, klej, bibuła, papier itp.	– drukowanie stemplem z ziemniaka, oklejanie, układanie, projektowanie – oklejanie ram owalnego lustra materiałem przyrodniczym, np. nasionami – układanie sznurka w kształcie koła i zamiana na kształt elipsy – tworzenie eliptycznego dywanu – dzieci otrzymują kawałek bibuły w kształcie prostokąta lub elipsy, wycinanie kształtu elipsy z kolorowej bibuły i projektowanie wzoru – tworzenie eliptycznych postaci, np. misia czy żaby z kolorowego papieru	– Jaki kształt rozpoznajecie? – Czy wszystkie kształty są takie same?

Elipsoida

Nazwa zabawy/ zadania	Cele	Środki dydaktyczne	Przejawy aktywności dzieci	Przykłady pytań i poleceń nauczyciela
Kształty i wrażenia	– tworzenie warunków do dokonywania indywidualnych spostrzeżeń i badań – klasyfikowanie przedmiotów	– przedmioty, rzeczy, owoce, warzywa w kształcie kuli i w eliptycznym kształcie, np. mango, pisanki drewniane, bakłażan, ziemniak, kiwi, piłeczki różnej wielkości, pomarańcza	– dotykanie przedmiotów – porównywanie – określanie za pomocą słów cech danej rzeczy: z czego jest wykonana, czy jest duża czy mała, jaka jest w dotyku, do czego służy	– Weźcie te przedmioty do rąk, pooglądajcie, zbadajcie ich kształt. Powiedzcie, jakie one są? – Porównajcie między sobą. – Jak można je podzielić?
Zabawy ruchowe	– wdrażanie do uczestniczenia w zabawach i zajęciach ruchowych	– dwie łyżki, przedmioty o eliptycznym kształcie, np. jajo, kiwi, ziemniak	– udział w konkursie dwóch grup, polegającym na przenoszeniu na łyżce obiektu o eliptycznym kształcie	– Którą rzecz niosło się najłatwiej, a którą najtrudniej? Dlaczego?

Zakończenie

Edukacja geometryczna to nie tylko wąska ścieżka edukacji matematycznej, kojarząca się z rozwiązywaniem zadań na pole powierzchni czy objętości, działaniem na sieci kwadratowej czy budowaniem modeli brył. Jak matematyka, tak i ona widoczna jest w otaczającej rzeczywistości i ma ścisły związek ze sztuką, architekturą, kulturą życia codziennego, myśleniem logicznym i twórczym. Podobnie jak nie sposób odkrywać jej tajników bez odniesienia do otaczającego świata, tak i nie sposób wykluczyć jej z edukacji małych dzieci.

Wcześnie i świadomie organizowana edukacja geometryczna może dostarczać wiele przeżyć poznawczych i estetycznych, może być przygodą. Co ważniejsze, gdy ma miejsce już na etapie przedszkolnym, pozwala dzieciom zebrać niezbędne doświadczenia, które są podstawą dalszych działań i uogólnień. Jak wykazują badania[1], organizowanie działań geometrycznych w przestrzeni sali przedszkolnej czy klasy szkolnej przyczynia się do znacznie lepszego rozumienia przez dzieci pojęć matematycznych i ich operatywnego wykorzystania.

W działaniach tych kluczową rolę odgrywa nauczyciel. Jest on odpowiedzialny za rozwój dziecka i ma znaczący wpływ na to, czy w przyszłości dziecko będzie aktywnym badaczem, bezmyślnym naśladowcą czy uzdolnionym geometrycznie matematykiem lub artystą. Kompetentny merytorycznie nauczyciel docenia rolę czynnika przestrzennego w edukacji matematycznej swoich wychowanków, nie pozwala, by arytmetyka wypełniła treści kształcenia matematycznego; łączy dziedziny i ścieżki matematyki; poszukuje najlepszych sposobów; świadomie dobiera metody, środki i formy najbardziej adekwatne do potrzeb odbiorcy; rozwija swoją wiedzę i jest świadomy zasad określonych przez dydaktyków matematyki. Jest świadomy pewnych zasad:

- ostateczny wybór efektywnej metody w danej sytuacji zależy od przygotowania uczniów, konkretnej sytuacji w klasie oraz celów i treści nauczania;

[1] H. Siwek, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa 2005, s. 54.

- jego działanie dydaktyczne winno być wszechstronne, zmieniające się i twórcze; nie powinno być w nim miejsca na skostnienie i rutynę;
- zasadą dobrego nauczania powinno być stosowanie wielu metod, właściwie dobranych i integrowanych, stosowanie różnych form organizacyjnych nauczania, uwzględnianie dobrych doświadczeń znanych koncepcji nauczania oraz celowe wykorzystanie możliwych środków dydaktycznych[2].

Przytoczone powyżej uogólnienia i postulaty sformułowane zostały przez W. Nowak i opisane w *Konwersatorium z dydaktyki matematyki.* Po dziś dzień są one w postępowaniu dydaktycznym swego rodzaju drogowskazami o uniwersalnej wartości. Odnosząc się do nich, warto podkreślić, że pierwsza dyrektywa uwrażliwia dorosłego na poznanie wychowanków, ich dyspozycji i motywacji, wskazuje na kontekstualność sytuacji, na to, że mimo to, iż treści podstawy programowej są takie same dla wszystkich, podręcznik może być także ten sam, to efekty pracy mogą być inne. Wynika to z faktu, że każde dziecko jest inne, każdy nauczyciel ma własny styl pracy, a cele kształcenia geometrycznego można realizować za pomocą różnych metod i z wykorzystaniem różnych treści. Trzeba tylko być wrażliwym, refleksyjnym i poszukującym.

Druga ważna rzecz to elastyczność i twórczość. Nuda, rutyna i powtarzalność to wrogowie twórczości matematycznej. Szczególnie, że geometria jako nauka o kształtach i przestrzeni jest wszędzie, trzeba ją tylko niektórym pomóc dostrzec. To dostrzeganie i poszukiwanie kształtów i cech może mieć miejsce w sali szkolnej i w plenerze, w działaniach codziennych, szkolnych zadaniach, działalności plastycznej i zabawie.

Trzecia kwestia to metodologia i metodyka pracy, która mieści w sobie sposoby i środki dydaktyczne, aranżację przestrzeni edukacyjnej, by była jak najbardziej badawcza, dobór trafnych środków dydaktycznych i zróżnicowanych form pracy: w grupach, diadach, pracy indywidualnej. Podkreślając ich ważność, przychylam się tym samym do zdania badaczy i akcentuję, że warto śledzić najnowsze doniesienia z badań, raporty, nowinki techniczne, powalające poszukiwać własnej drogi dydaktycznej i jednocześnie umożliwiające posiadanie aktualnej wiedzy o rozwoju geometrii, zwłaszcza że świat dziecka wychodzi – i to bardzo szybko – poza dobrze znane nam wymiary.

2 W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989, s. 219.

Bibliografia

Bałachowicz J., *Kategoria podmiotowości jako wyznacznik przemian stylu pracy współczesnego nauczyciela* [w:] *Nauczyciel w systemie edukacyjnym teraźniejszość i przyszłość*, I. Adamek, E. Żmijewska (red.), Wyd. Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków 2009.

Bilewicz-Kuźnia B., T. Parczewska, *Entliczek pentliczek*, *Ku dziecku. Program wychowania przedszkolnego,* Nowa Era, Warszawa 2010.

Bilewicz-Kuźnia B., *Geometria w edukacji dzieci* [w:] M. Karwowska-Struczyk, D. Sobierańska, M. Szpotowicz, *Pedagogika przedszkolna i wczesnoszkolna. Badania, opinie, inspiracje*, Warszawa 2011.

Bilewicz-Kuźnia B., *Historyczny i współczesny obraz edukacji przedszkolnej według koncepcji Friedricha Wilhelma Fröbela* [w:] T. Parczewska, B. Bilewicz-Kuźnia, *Edukacja przedszkolna w Polsce i na świecie, wybrane zagadnienia*, UMCS, Lublin 2013, s. 39.

Bilewicz-Kuźnia B., T. Parczewska, *Program jako strategia stymulacji wielokierunkowej aktywności nauczyciela* i dzieci [w:] *Relacje i konteksty (w) edukacji elementarnej*, I. Adamek, M. Grochowalska, E. Żmijewska (red.), Wyd. Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków 2010.

Bilewicz-Kuźnia B., *The essence of ways and conditions in which children explore the word of geometry, Komplexnos a integrita w predprimárnej, primárnej, a specialnej edukcji, Zborník příspěvkow s mezinárodnou účaststou konanej 20–22 septembra 2012 na Pedagogickiej falulte Prešovskej univerzity v Prešove*, Alena Prídavková, Martin Klimovič (eds.), Prešov 2012.

Bobrowska-Nowak W., *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. I, WSiP, Warszawa 1978.

Bobrowska-Nowak W., *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. II, WSiP, Warszawa 1978.

Borkowska A. R., Domańska Ł., *Neuropsychologia kliniczna dziecka,* PWN, Warszawa 2006.

Bruce T. (ed.), *Early Childhood practice. Froebel today*, SAGE, London 2012.

Bruner J., *O poznawaniu. Szkice na lewą rękę,* PIW, Warszawa 1971.

Bruner J., *Poza dostarczone informacje*, PWN, Warszawa 1978.

Bruner J., *Proces kształcenia*, PWN, Warszawa 1965.

Brzezińska A., *Społeczna psychologia rozwoju,* Wyd. Naukowe Scholar, Warszawa 2004.

Bugajska-Jaszczołt B., D. Drygała, *Jak uczymy przyszłych nauczycieli algebry liniowej?* [w:] *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, M. Czajkowska, G. Treliński (red.), Wyd. AŚ, Kielce 2006.

Bulman S., *The Froebel Gifts 2000, The building gifts 2-6,* Kindergarten Messenger a division of American Traditional Toys, Inc. 2000.

Centner-Guz M., Nieopublikowane materiały dydaktyczne w formie opisu pomocy M. Montessori przygotowane w ramach Podyplomowych Studiów w zakresie Pedagogiki Marii Montessori, prowadzonych przez Zakład Pedagogiki Przedszkolnej UMCS w Lublinie, 2006.

Cieszyńska J., *Kocham się uczyć. Odwracamy obrazki, aby dziecko kochało czytać, nie bało się geometrii i czytania mapy na lekcji geografii*, Wyd. Edukacyjne, Kraków, 2010.

Czekalska R., A. Gaj, B. Lauba, J. Matczak, A. Piecusiak, J. Sosnowska, *Odkryjmy Montessori raz jeszcze...,* Of. Wyd. Impuls, Kraków 2010.

Danielewicz T., D. A. Kozmińska, J. Magnuska, *Terapia uspokajająca dla dzieci nerwicowych i dyslektycznych,* Polskie Towarzystwo Higieny Psychicznej, Warszawa 1984.

Dawid J. W., *O metodach wychowawczych ogródków freblowskich* [w:] W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego,* cz. II, WSiP, Warszawa 1978.

Dąbrowski M., M. Żytko, *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Raport z badania ilościowego,* część I. Badanie prowadzone w ramach projektu realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną, współfinansowanego przez Europejski Fundusz Społeczny, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2007.

Dziamska D., *Magiczne kwadraty, czyli origami płaskie z kwadratu,* Wyd. Bis, Warszawa 2008.

Dziamska D., *Papierowa wioska smerfów, czyli origami płaskie z kwadratu,* Wyd. Bis, Warszawa 2008.

Dziamska D., *Bajkowe kółeczka, czyli origami płaskie z koła,* Wyd. Bis, Warszawa 2010.

Dziamska D., *Edukacja przez ruch. Zabawy z papierowym wachlarzem,* Wyd. WSiP, Warszawa 2008.

Dziamska D., *Filmowe orgiami, czyli orgiami płaskie z koła, kwadratu i trójkątna,* Wyd. Bis, Płock 2010.

Dziamska D., *Magiczne prostokąty, czyli origami płaskie i przestrzenne z prostokąta,* Wyd. Bis, Warszawa 2005.

Dziamska D., *Magiczne trójkąty, czyli origami płaskie i przestrzenne z trójkąta,* Wyd. Bis, Warszawa 2004.

Dziamska D., *Nacinamy kółeczka, czyli kiri-origami płaskie z koła,* Wyd. Bis, Warszawa 2008.

Dziamska D., *Papierowe postaci, czyli origami płaskie z koła*, Wyd. Bis, Warszawa 2007.

Encyklopedia szkolna Matematyka, W. Waliszewski (red.), WSiP, Warszawa 1997.

Fenstermacher G. D., J. F. Soltis, *Style nauczania*, WSiP, Warszawa 2000.

Fiedler M., *Matematyka już w przedszkolu*, WSiP, Warszawa 1978.

Filip J., Rams T., *Dziecko w świecie matematyki,* Of. Wyd. Impuls, Kraków 2000.

Garbula J. M., *Znaczenie historyczne w edukacji początkowej. Narracyjne konstruowanie historii rodzinnych*, Wydawnictwo UWM, Olsztyn 2010.

Gardner H., *Inteligencje wielorakie. Nowe horyzonty w teorii i praktyce*, Wyd. Laurum, Warszawa 2009.

Gołębniak B. D., *Konstruktywizm – moda, nowa religia czy tylko/aż interesująca perspektywa w myśleniu nauczycieli,* „Problemy Wczesnej Edukacji" 2005, nr 1.

Grochulski J., Ruszczyk H., *Aktywizacja uczniów w procesie nauczania matematyki* [w:] *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, M. Czajkowska, G. Treliński (red.), Wyd. Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2006.

Gruszczyk-Kolczyńska E., E. Zielińska, *Dziecięca matematyka. Książka dla rodziców i nauczycieli,* WSiP, Warszawa 1997.

Gruszczyk-Kolczyńska E., „Dzieci uzdolnione matematycznie: mity i realia". Referat wygłoszony na konferencji: „Indywidualizacja w edukacji wczesnoszkolnej" 08.11.2010 w Lublinie.

Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki,* WSiP, Warszawa 1997.

Gruszczyk-Kolczyńska E., H. Moroz, J. Łysek, M. Wojnowska, *Metoda diagnozy działalności matematycznej dzieci z klas początkowych*, Wyd. Radia i Telewizji, Warszawa 1988.

Gruszczyk-Kolczyńska E., *Jak kształtuje się u dzieci psychiczna dojrzałość do uczenia się matematyki,* „Wychowanie w Przedszkolu" 1988, nr 6.

Gucewicz-Sawicka I. (red.), *Podstawowe zagadnienie dydaktyki matematyki,* PWN, Warszawa 1982, s. 311.

Guz S., *Edukacja przedszkolna w okresie przemian*, WSP TWP, Warszawa 1996.

Guz S., *Metoda Montessori w przedszkolu i szkole. Kształcenie i osiągnięcia*, Wyd. UMCS, Lublin 2006.

Hanisz J., *Program wczesnoszkolnej zintegrowanej edukacji XXI wieku, klasy I–III,* WSiP, Warszawa 1999.

Heiland H., *Friedrich Fröbel (1782–1852),* „Kwartalnik Pedagogiczny" 2000, nr 1/2.

Hejný M., *Analiza dydaktyczna pojęć matematycznych – przykłady geometryczne*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2001.

Hejný M., *The Understanding Of Geometrical Concept, Proceedings of the 3rd Bratislava International Symposium on Mathematical Education*, BISME 3, Comenius University, Bratislava 1993.

Hinz M., *Rusz głową i figurą,* Wyd. Harmonia, Gdańsk 2010.

Jagodzińska M., *Obraz w procesach poznania i uczenia się. Specyfika informacyjna, operacyjna i anatomiczna,* WSiP, Warszawa 1991.

Jędrychowski W., Kordos M. (red.), *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie,* WSiP, Warszawa 1993.

Juszkiewicz A., Went W., *Program nauczania. Poznaję świat i wyrażam siebie. Kształcenie zintegrowane w klasach I–III,* Wyd. Didasko, Warszawa 1999.

Karwowska-Struczyk M., *Program wychowania przedszkolnego w okresie zmiany ustrojowej* [w:] R. Piwowarski (red.), *Dziecko – nauczyciel – rodzice. Konteksty edukacyjne*, IBE, Białystok 2003.

Kielar-Turska M., *Potrzeby i możliwości poznawcze dziecka,* „Wychowanie w Przedszkolu" 1989, nr 1.

Klakla M., *Z badań nad rozpoznawaniem uzdolnień matematycznych* [w:] *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, J. Żabowski (red.), t. III, Płock 2002.

Klakla M., *Procesy psychiczne związane z procesem pojęć i struktur* [w:] *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, J. Żabowski (red.), t. III, Płock 2002.

Klus-Stańska D., *Konteksty teoretyczne nadawania znaczeń przez dzieci. Wokół pytań o rozumienie pedagogicznego wsparcia* [w:] *Wspieranie rozwoju dzieci w procesie wczesnej edukacji*, W. Puślecki (red.), Wyd. Naukowe Dolnośląskiej Szkoły Wyższej, Wrocław 2008, s. 41–44.

Klus-Stańska D., A. Kalinowska, *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Wyd. Akad. Żak, Warszawa 2004.

Klus-Stańska D., *Światy dziecięcych znaczeń*, Wyd. Akademickie Żak, Warszawa 2004.

Klus-Stańska D., *Konteksty teoretyczne nadawania znaczeń przez dzieci. Wokół pytań o rozumienie pedagogicznego wsparcia* [w:] *Wspieranie rozwoju dzieci w procesie wczesnej edukacji*, W. Puślecki (red.), Wyd. Naukowe DSW, Wrocław 2008.

Kłosińska T., *Droga do twórczości. Wdrażanie technik Celestyna Freineta,* Of. Wyd. „Impuls", Kraków 2000.

Kompetencje kluczowe. Realizacja koncepcji na poziomie szkolnictwa obowiązkowego, EURIDYCE Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji, Warszawa 2005.

Konior J., *Pojęcia matematyczne i ich kształtowanie w nauczaniu szkolnym* [w:] *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, t. IV, Płock 2002.

Košč L., *Psychologia i patopsychologia zdolności matematycznych*, WSiP, Warszawa 1982.

Kozak-Czyżewska E., *Formy aktywności matematycznej uczniów klas początkowych* [w:] S. Guz, T. Sokołowska-Dzioba, A. Pielecki (red.), *Wielowymiarowość aktywności i aktywizacji*, WSP TWP, Warszawa 2008, s. 143.

Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. III, WSiP, Warszawa 1977.

Krygowska Z., *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich,* Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki 6, 1986.

Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, WSiP, Warszawa 1977.

Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2, WSiP, Warszawa 1977.

Kuszak K., *Zmiany w edukacji przedszkolnej jako warunek podniesienia jakości życia dzieci* [w:] *Dziecko w szkolnej rzeczywistości. Założony a rzeczywisty obraz edukacji elementarnej*, H. Sowińska (red.), Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2011.

Ladaczek B., *Geometria elementarna,* Wyd. Bronisław Ladaczek, Wrocław 1999.

Laskowski A., *Tendencje w kształceniu matematycznym a niektóre „stare" przyczyny specyficznych trudności matematycznej* [w:] *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, M. Czajkowska, G. Treliński (red.), Wyd. Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2006.

Lewicka H., M. Kowalczyk, *Matematyka wokół nas. Podręcznik dla szkoły podstawowej*, WSiP, Warszawa 2009.

Łubianka B., *Wokół uzdolnień matematycznych – przegląd badań,* Studia z psychologii KUL, t. 14, P. Francuz, W. Otrębski (red.), KUL, Lublin 2007.

Maćkowiakowie J. i A., *Rozwój pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym,* Poznań 1960.

Makowska B., *Rola ornamentyki w architekturze do okresu modernizmu,* Politechnika Krakowska, Kraków 2008.

Mandale – sposób na odprężenie i wyciszenie dzieci w wieku przedszkolnym, Jedność, Kielce 2005.

Marciniak H., U. Mazurkiewicz, M. Szewczyk, *Zintegrowane nauczanie początkowe. Program autorski,* Wyd. Juka, Warszawa 1999.
Marenholtz-Bülow B., *How kindergarten came to America, Friedrich Frobel's radical vision of Early childhood education,* The New Press, New York 2007.
Maruszewski T., *Psychologia poznania*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2001.
Matejuk H., A. Kaczanowska, G. Wnuk, L. Czarnecka, *Mój świat. Program kształcenia zintegrowanego w szkole podstawowej*, Wyd. Szkolne PWN, Warszawa 1999.
Montessori M., *O swojej metodzie wychowawczej* [w:] W. Bobrowska-Nowak, *Zarys dziejów wychowania przedszkolnego*, cz. II, WSiP, Warszawa 1978.
Montessori M., *Domy dziecięce*, Wyd. Żak, Warszawa 2005.
Moroz H., *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym,* WSiP, Warszawa 1982.
Murawski R., *Filozofia matematyki*, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2008.
Noga E., *Delfin. Trening umiejętności poznawczych*, Wyd. Klanza, Lublin 2004.
Nowak W., *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989.
Nowaczyk Cz., *Uczeń zdolny*. *Rozpoznawanie zdolności i uzdolnień dzieci i młodzieży*, ODN, Jelenia Góra 1988.
Nowak W., *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989, s. 219.
Nowik J., *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym,* Wydawnictwo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Raciborzu, Racibórz 2008.
Nowik J. S., *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej,* Wyd. Nowik, Opole 2009.
Nowy leksykon PWN, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1998.
Okoń W., *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*, PWN, Warszawa 1987.
Okoń W., *Słownik pedagogiczny,* Warszawa 1981.
Pardała A., *Nowe tendencje w kształceniu matematycznym szansą podniesienia jego poziomu* [w:] *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, M. Czajkowska, G. Treliński (red.), Wyd. Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2006.
Partyka M., *Zdolni, utalentowani, twórczy*, CMPPP, MEN, Warszawa 1999.
Pawlak R. J., *Dojrzałość matematyczna. Trudności i przeszkody w posługiwaniu się matematyką,* Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria V. Dydaktyka Matematyki 26, 2004.
Pawłowska-Niedbała A., *Sześciolatek w świecie figur geometrycznych,* „Wychowanie w Przedszkolu" 2009, nr 5.
Pisarski M., *Matematyka dla naszych dzieci,* Wyd. ECERI, Białystok 1992.
Pollman M. J., *Blocks and Beyond*, Paul H. Brookes Publishing cl., Baltimore 2010.
Popek S. (red.), *Aktywność twórcza dzieci i młodzieży,* WSiP, Warszawa 1988.
Popek S., *Psychologiczne i społeczne uwarunkowania zdolności i uzdolnień specjalnych* [w:] A. Biela, Cz. Walesa (red.), *Problemy współczesnej psychologii,* t. 1 (s. 97–105), Wyd. PTP, Lublin 1992.
Program nauczania ośmioklasowej szkoły podstawowej, klasy I–IV, PZWS, Warszawa 1963.
Program nauczania początkowego, klasy I–III, WSiP, Warszawa 1983.
Program pracy wychowawczo-dydaktycznej w klasie przedszkolnej, Ministerstwo Oświaty i Wychowania, Instytut Programów Szkolnych, WSiP, Warszawa 1975.

Program wychowania w przedszkolu, Ministerstwo Oświaty i Wychowania, Instytut Programów Szkolnych, WSiP, Warszawa 1981.

Program wychowania w przedszkolu, MOiW, Instytut Programów szkolnych, WSiP, Warszawa 1984

Read H., *Sens sztuki*, PWN, Warszawa 1982.

Reclik R., *Wspieranie aktywności geometrycznej dzieci w młodszym wieku szkolnym* [w:] *Wspieranie rozwoju dzieci w procesie wczesnej edukacji*, W. Puślecki (red.), Wyd. Dolnośląskiej Szkoły Wyższej Edukacji TWP we Wrocławiu, Wrocław 2008.

Rościszewska-Woźniak M., *Dobry start przedszkolaka*, Wyd. Edukacyjne Żak, Warszawa 2010.

Sadoń-Osowiecka T., *Uczenie się geografii w edukacji wczesnoszkolnej* [w:] *Twórcze działania przyrodnicze i matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, A. Komorowska-Zielony (red.), Wyd. UG, Gdańsk 2008.

Seidel J., M. Sobieszczyk, *Kosz i walizeczka, czyli o niektórych problemach edukacji matematycznej* [w:] *Efektywność kształcenia zintegrowanego. Implikacje dla teorii i praktyki*, H. Siwek (red.), WSP TWP, Katowice 2007.

Semadeni Z. (red.), *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 4, WSiP, Warszawa 1984.

Siwek H., *Czynnościowe nauczanie matematyki,* WSiP, Warszawa 1998.

Siwek H., *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowanie w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa 2005.

Sobol E. (red.), *Ilustrowany słownik język polskiego,* Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1999.

Sporer Z., Dragic N., *Och, ta geometria*, Nasza Księgarnia, Warszawa 1991.

Strelau J., *Temperament i inteligencja*, PWN, Warszawa 1995.

Strzemeska J., M. Weryho, *Wychowanie przedszkolne. Podręcznik dla wychowawców*, Księgarnia Teodora Paprockiego i S-ki, Warszawa 1895.

Suświłło M., *Inteligencje wielorakie w nowoczesnym kształceniu*, Wyd. Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Olsztyn 2004.

Swoboda E., Regularnoś*ci geometryczne w uczeniu się dzieci* [w:] *Dziecko i matematyka*, E. Swoboda, J. Gunčaga (red.), Wyd. Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2009.

Swoboda E., *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci,* Wyd. Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2006.

Swoboda E., Gunčaga J. (red.), *Dziecko i matematyka* Wyd. Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2009.

Szarygin J. F., L. N. Jerganżyjewa, *Geometria poglądowa*, Wyd. Oświatowe Fosze, Rzeszów 1995.

Tokarska E., J. Kopała, *Zanim będę uczniem*, Wyd. Edukacja Polska, Marki 2010.

Treliński G., *Elementy geometrii w nauczaniu początkowym,* „Życie Szkoły" 2011, nr 5.

Treliński G., *Stymulowanie aktywności – przeciwdziałanie bezradności matematycznej ucznia* [w:] *Uczeń we współczesnej szkole. Problemy reformy edukacji wczesnoszkolnej,* Z. Ratajek (red.), Wyd. Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2005.

Treliński G., *Trzy przykłady, czyli o stymulowaniu i pielęgnowaniu bezradności matematycznej* [w:] *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, M. Czajkowska, G. Treliński (red.), Wyd. Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2006.

Treliński G., *Zintegrowana edukacja wczesnoszkolna*, *3M Matematyka, Modelowanie, Metodyka,* Naukowe Wydawnictwo Piotrkowskie, Piotrków Trybunalski, 2011.

Treliński G., *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I–III,* Wszechnica Świętokrzyska, Kielce 2004.
Turnau S., *Wykłady o nauczaniu matematyki,* PWN, Warszawa 1990.
Twardowska A., W. Próchniewicz, *Wesołe instrumenty,* Wyd. Werset, Warszawa 2006.
Tyl A., *Plastyczność myślenia uczniów klas początkowych rozwiązujących matematyczne zadania tekstowe* [w:] *Twórcze działania przyrodnicze i matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, A. Komorowska-Zielony (red.), Wyd. Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2008.
Tyl A., *Aktywność geometryczna małego dziecka* [w:] *Relacje i konteksty w edukacji elementarnej,* I. Adamek, M. Grochowalska, E. Żmijewska (red.), Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, Kraków 2010.
Uszyńska-Jarmoc J., *Podróże – Skarby – Przygoda. Podręcznik i program rozwijania twórczości, samoświadomości oraz dyspozycji autokreacyjnych dzieci z klas I–III,* Wydawnictwo Trans Humana, Białystok 2005.
Vasta R., M.M. Haith, S. A. Miller, *Psychologia dziecka,* WSiP, Warszawa 1995.
Vopěnka P., *Rozprawy s Geometrii*, tłum. Z. Romankiewicz, Panorama, Praha 1989.
Wasiukiewicz J., *Kształtowanie pojęć względnych*, „Życie Szkoły" 1985, nr 6.
Wołoszyn S., *Źródła do dziejów wychowania i myśli pedagogicznej*, t. 1, PWN, Warszawa 1965.
Wygotski L., *Nauczanie a rozwój w wieku przedszkolnym* [w:] L. S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*, Warszawa 1971.
Zelker R., *Symetryczne dyktanda graficzne,* Wyd. Harmonia, Gdańsk 2010.
Zydler J., *Geometria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.
Zyzik E., W. Grelowska, *Po czym poznać dziecko zdolne* [w:] *Wspieranie rozwoju zdolności uczniów w edukacji wczesnoszkolnej. Teoria i praktyka*, I. Stańczak (red.), Wyd. Pedagogiczne ZNP, Kielce 2008.
Żebrowska M., *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży*, PWN, Warszawa 1980.
Żytomirski W., L. Szewrin, *Geometria dla najmłodszych,* WSiP, Warszawa 1989.

AKTY PRAWNE

Podstawa programowa stanowi załącznik nr 1 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 1 grudnia 1999 r. zmieniającego rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego (Dz.U. nr 2 z 17 stycznia 2000 r. poz. 18).
Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z dnia 15 stycznia 2009).
Zarządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 11.04.1992 r. w sprawie minimum programowego wychowania przedszkolnego oraz zestawu dopuszczonych do użytku programów wychowania przedszkolnego (Mon. Pol. nr 12, poz. 86).
Scalona wersja dwu dokumentów programowych: Programu wychowania w przedszkolu wprowadzonego zarządzeniem Ministra Oświaty i Wychowania z dnia 11 maja 1973 i wkładki do tego programu pt. Zakres treści wychowania i kształcenia la dzieci sześcioletnich – zmiana z dnia 8 marca 1977, Ministerstwo Oświaty i Wychowania, Instytut Programów Szkolnych, WSiP, Warszawa 1984

STRONY INTERNETOWE

http:// www.ore.pl lub www.scholaris.pl, data dostępu: 24.11.2010.

http://astraland.pl/index.php?s=konspekty_zajec_dla_nauczycieli&id=22, data dostępu: 20.05.2011.

http://astraland.pl/index.php?s=konspekty_zajec_dla_nauczycieli&id=22, data dostępu: 20.05.2011.

http://debinka.pl/downloads/swiatlem_malowane.pdf, data dostępu: 26.06.2011.

http://encyklopedia.pwn.pl/lista.php?co=intuicja; data dostępu: 26.01.2011.

http://pl.wikipedia.org/wiki/Horror_vacui, data dostępu: 2.02.2012.

http://pl.wikipedia.org/wiki/Intuicja, data dostępu: 26.01.201.

http://pl.wikipedia.org/wiki/Intuicjonizm_%28matematyka%29, data dostępu: 28.03.2013.

http://pl.wikipedia.org/wiki/wst%c4%99ga_m%c3%b6biusa, data dostępu: 30.06.2011

http://wiki.wolnepodreczniki.pl/Matematyka:Gimnazjum/Symetria_osiowa_animacje, data dostępu: 30.06.2011.

http://www. scholaris.pl/frontnd, data dostępu: 01.07.2012.

http://www.bip.ore.edu.pl/bip_download.php?id=450, data dostępu: 10.06.2012.

http://www.froebelweb.org/images/stein.html, data dostępu: 12.12.2013

http://www.haveyougotmathseyes.com, data dostępu: 2.03.2012.

http://www.matematyka.wroc.pl/book/gwiazda-morawska, data dostępu: 30.06.2011.

http://www.matematyka.wroc.pl/matematyka-wokol-nas/w-sztuce, data dostępu: 02.07.2011.

http://www.ore.pl, data dostępu: 01.07.2012.

Edukacja matematyczna przechodzi współcześnie głębokie zmiany. Coraz bardziej przekonujemy się, że ani podejście werbalne, osadzone w strukturach powierzchniowych, ani dominująca algebraizacja treści nie wystarcza. W kształceniu powinno dominować podejście całościowe, które nie może być pozbawione składowej geometrycznej. Wiele trudności dzieci w uczeniu się nie tylko matematyki jest konsekwencją eliminowania geometrii (treści, języka, sposobu wizualizacji i konkretyzacji) w programach nauczania, w praktyce szkolnej, a nawet w opracowaniach pedagogicznych.

Z tego punktu widzenia książka ta jest wartościową pozycją. Pokazuje ona, że intuicyjne planowanie nauczania matematyki, edukacji geometrycznej można zastąpić nauczaniem opartym na podstawach teoretycznych [...] Mamy w niej bogactwo analiz dydaktycznych, obfitość przykładów, ciekawych rozwiązań metodycznych rzadko spotykanych w innych opracowaniach. Sugerowane nietypowe środki dydaktyczne pozwalają młodszym uczniom manipulować, a nie tylko obserwować i opisywać czynności wykonywane przez nauczyciela. To wszystko zostało ujęte i przedstawione z uwzględnieniem aktualnych zmian w wizerunku matematyki szkolnej, a także współczesnych poglądów na nauczanie i uczenie się.

Z recenzji prof. dr hab. Gustawa Trelińskiego

UMCS
WYDAWNICTWO

9 788377 845356